Beiträge zur Theorie des mehrfachen optimalen Stoppens

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

vorgelegt von

Stephan Jürgens

Kiel

Dezember 2010

Referent: Prof. Dr. Albrecht Irle

Korreferent: PD Dr. Volkert Paulsen

Tag der mündlichen Prüfung: 31.01.2011

Zum Druck genehmigt: Kiel, 31.01.2011

Der Dekan, gez. Prof. Dr. Lutz Kipp

Danksagungen

Mein herzlicher Dank gilt Herrn Prof. Dr. A. Irle für die hervorragende Betreuung dieser Arbeit und die vielen Freiheiten, die ich bei ihrer Erstellung genoss.
Mein Dank geht auch an die gesamte Arbeitsgruppe Stochastik, die mir durch ihr Fachwissen und ihre Anregungen sehr oft weitergeholfen hat.
Des Weiteren möchte ich mich besonders bei meinen Eltern bedanken, die in jeglicher Hinsicht die Grundsteine für meinen Weg gelegt haben. Ohne sie wäre ein Studium und eine Doktorarbeit niemals möglich gewesen.

Zusammenfassung

Gegenstand dieser Arbeit sind Stoppprobleme mit mehreren Ausübungsrechten im kontinuierlichen Modell mit endlichem und unendlichem Zeithorizont.

Zu Beginn wird die Theorie des optimalen Stoppens mit endlich vielen Ausübungsrechten auf den unendlichen Fall übertragen. Insbesondere wird gezeigt, dass der faire Preis einer Option mit unendlich vielen Ausübungsrechten gleich dem einer anderen Option mit einem Ausübungsrecht ist. Weiter ist diese Option mit einem Ausübungsrecht so konstruiert, dass deren optimale Strategien die der Option mit unendlich vielen Ausübungsrechten charakterisieren. Danach wird die allgemeine Theorie in der Markovschen Stoppsituation spezifiziert.
Anschließend wird ein kontinuierliches Modell mit endlichem Horizont betrachtet: Es werden verschiedene Möglichkeiten beschrieben, die mehrfachen Stoppprobleme in diesem Modell zu formulieren, und es wird auf Auszahlungsprozesse eingegangen, die auch negative Werte annehmen können. Die zuvor betrachteten mehrfachen Optimierungsprobleme mit unendlichem Horizont erhält man als Grenzübergang bei Stoppproblemen mit endlichem Horizont.
Während bisher zwischen den einzelnen Ausübungsstrategien ein Zeitfenster von einer fest vorgegebenen Länge liegen muss, werden abschließend Optimierungsprobleme betrachtet, in denen diese vorgegebene Länge eine zufällige Größe ist. Es werden zwei Möglichkeiten betrachtet, diese zufälligen Wartezeiten zu modellieren, und die vorherigen Ergebnisse auf diese Modelle übertragen. Die allgemeine Theorie wird für den Auszahlungsprozess einer amerikanischen Put-Option spezifiziert und für die Optimierungsprobleme mit zufälligen Wartezeiten wird eine duale Darstellung beschrieben.

Abstract

This thesis deals with problems of optimal stopping involving multiple exercise rights in continuous time with finite and infinite time horizon.

First the theory of optimal stopping with finitely many exercise rights is carried over to the case of infinitely many exercise rights. In particular it is proved that the fair price of an option with infinitely many exercise rights is the price of another option with only one exercise right. Furthermore this option with one exercise right is constructed in such a manner that its optimal strategies characterize the optimal strategies for the option with infinitely many exercise rights. Thereafter this general theory is specified for Markovian problems.
Afterwards a continuous time model with finite time horizon is considered: Different alternatives for introducing multiple exercise problems in this model are described, and processes with possibly negative payoff are also treated. The optimization problems discussed before can be obtained as a limit of these problems with finite time horizon.
While up to this point a fixed time span between two exercise times was required, finally optimization problems with random time spans are considered. Two possibilities for modeling this random time span are studied and the results obtained so far are carried over to these models. The general theory is specified for an American put option. Furthermore a dual representation for optimization problems with random time spans is described.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **1**

1 Mehrfaches optimales Stoppen **6**

1.1 Modell 6

1.2 Beispiele 7

1.3 Überführung des mehrfachen Stoppproblems in ein klassisches Stoppproblem 9

1.4 Stoppprobleme mit unendlich vielen Ausübungsrechten 15

2 Optimale Stoppzeiten und Stoppgebiete **26**

2.1 Optimale Stoppzeiten 27

2.2 Der Markov-Fall 31

2.3 Optimale Stoppzeiten im Markov-Fall 36

3 Mehrfaches optimales Stoppen mit endlichem Horizont **42**

3.1 Modell 43

3.2 Überführung in ein klassisches Stoppproblem mit endlichem Horizont . . . 46

3.3 Eine Anwendung der Doob-Meyer Zerlegung 51

3.4 Zusammenhang zwischen endlichem und unendlichem Horizont 54

3.5 Statistische Optimierungsprobleme 57

3.5.1 Modell 57

3.5.2 Beispiel: Produktionsplanung mit beschränkten Ressourcen 57

3.5.3 Statistische Optimierungsprobleme mit endlichem Horizont 58

3.5.4 Statistische Optimierungsprobleme mit unendlichem Horizont . . . 60

4 Zufällige Wartezeiten **64**

4.1 Zugrundeliegende Filtration 65

4.2 Ausübungsstrategien bei zufälligen Wartezeiten 67

4.3 Mehrfaches Stoppen mit zufälligen Wartezeiten 72

4.4 Mehrfaches Stoppen mit zufälligen Wartezeiten im diskreten Fall 76

4.5 Der Markov-Fall bei zufälligen Wartezeiten 78

4.6 Alternative Modellierung 82

4.7 Duale Darstellung von Stoppproblemen mit mehrfachen Ausübungsrechten 88

Literaturverzeichnis **96**

Einleitung

Obwohl etliche Probleme aus dem Bereich der Finanzmathematik, Statistik und Produktionsplanung in ein *mehrfaches optimales Stoppproblem* überführt werden können, sind viele Fragestellungen aus diesem Gebiet noch nicht behandelt worden. Um die Fragestellungen, die in dieser Arbeit aufgegriffen werden, näher zu beschreiben, wird zunächst das *Problem des mehrfachen optimalen Stoppens* am Beispiel der Bewertung einer amerikanischen Option mit mehreren Ausübungsrechten erläutert:
Der Inhaber eines solchen derivativen Finanzgutes hat, im Gegensatz zur klassischen amerikanischen Option, das Recht, eine Option, z.B. eine bestimmte Aktie zu einem vorher festgelegten Preis zu kaufen oder zu verkaufen, mehrmals jeweils an unterschiedlichen Zeitpunkten auszuüben. Dabei ist die Anzahl der Ausübungsrechte $n \in \mathbb{N}$ vorher fest vorgegeben. Übt der Inhaber die Rechte zu den verschiedenen Zeitpunkten mit den Strategien $\tau_1, ..., \tau_n$ aus, so erhält er die Summe der Auszahlungen von n klassischen amerikanischen Optionen, die er jeweils mit den Strategien $\tau_1, ..., \tau_n$ ausgeübt hätte. Folglich versucht er die Ausübungsstrategien so zu wählen, dass die erwartete Summe der n Auszahlungen maximal wird. Beispiele für amerikanische Optionen mit mehreren Ausübungsrechten sind die in Abschnitt 1.2 beschrieben Mitarbeiteroptionen, flexiblen Höchstzins-Optionen und am Energiemarkt gehandelten Swing-Optionen.
Zur Lösung von Optimierungsproblemen dieser Art liegt die Theorie des mehrfachen optimalen Stoppens vor, dem das folgende klassische Stoppproblem zugrunde liegt:
Gegeben sei eine Zeitparametermenge $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$, eine Filtration $\mathfrak{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$ und ein $\mathfrak{F}$-adaptierter nicht-negativer stochastischer Prozess $Y = (Y(t))_{t \in \mathcal{T}}$, der als *Auszahlungsprozess* bezeichnet wird. Das *klassische Problem des optimalen Stoppens* ist die Bestimmung des Wertes

$$\sup_{\tau \in \mathcal{S}} EY(\tau),$$

wobei mit $\mathcal{S}$ die Menge der $\mathfrak{F}$-Stoppzeiten bezeichnet sei, und einer $\mathfrak{F}$-Stoppzeit τ^* mit

$$EY(\tau^*) = \sup_{\tau \in \mathcal{S}} EY(\tau).$$

Stoppzeiten mit dieser Eigenschaft werden als *optimal* bezeichnet.
Probleme des optimalen Stoppens treten in verschieden Bereichen der Mathematik auf,

z.B. in der Finanzmathematik bei der Portfoliooptimierung oder bei der Bewertung von amerikanischen Optionen und in der Statistik bei der Bestimmung eines optimalen Bayes-Tests, siehe R. Korn [22], G. Peskir und A. Shiryaev [27] und A. Wald und J. Wolfowitz [33] und [34].
Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist das *Problem des n-fachen optimalen Stoppens*, entsprechend zum klassischen Problem, die Bestimmung des Wertes

$$Z_n(0) = \sup_{(\tau_1,...,\tau_n)} E\Big(Y(\tau_1) + ... + Y(\tau_n)\Big) \tag{1}$$

und einer optimalen Familie von $\mathfrak{F}$-Stoppzeiten $(\tau_1^*, ..., \tau_n^*)$ mit

$$Z_n(0) = E\Big(Y(\tau_1^*) + ... + Y(\tau_n^*)\Big). \tag{2}$$

Dabei wird in (1) das Supremum über alle n-Tupel von $\mathfrak{F}$-Stoppzeiten $(\tau_1, ..., \tau_n)$ gebildet, die nur dadurch eingeschränkt sind, dass zwischen den zulässigen Strategien $\tau_1 \leq ... \leq \tau_n$ ein Zeitfenster von mindestens der Länge $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ vorliegen muss. Interpretiert man nach dem obigen Beispiel den Wert $Z_n(0)$ als die maximal erwartete Auszahlung einer amerikanischen Option mit n Ausübungsrechten, so muss der Inhaber dieser Option nach jeder Ausübung mindestens eine Wartezeit der Länge δ einhalten, bevor er das nächste Mal ausüben darf.
Eine wichtige Zielsetzung in der Theorie des mehrfachen optimalen Stoppens besteht darin, den Wert $Z_n(0)$ durch ein klassisches Optimierungsproblem darzustellen, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ einen $\mathfrak{F}$-adaptierten stochastischen Prozess $(Y_n(t))_{t\in\mathcal{T}}$ mit

$$Z_n(0) = \sup_{\tau\in\mathcal{S}} EY_n(\tau) \tag{3}$$

zu konstruieren. Weiter ist das Ziel, den neuen Auszahlungsprozesses Y_n nur durch die Prozesse Y und Z_{n-1} darzustellen, und wichtige Eigenschaften von Y auf Y_n zu übertragen. Ist für $\mathcal{T} = \mathbb{R}_{\geq 0}$ der Prozess Y zum Beispiel stetig, so soll dies auch auf Y_n zutreffen. Eine solche Darstellung wurde für $\mathcal{T} = \mathbb{N}_0$ von C. Bender und J. Schoenmakers [4, Chapter 2] und für $\mathcal{T} = \mathbb{R}_{\geq 0}$ und rechtsseitig-stetige Auszahlungsprozesse von R. Carmona und S. Dayanik [6, Proposition 3.2] bewiesen. Außerdem wurde unter zusätzlichen Bedingungen an die Filtration $\mathfrak{F}$ (3) von R. Carmona und N. Touzi [7, Theorem 2.1] für $\mathcal{T} \in \{[0,T];\ T \in \mathbb{R}_{\geq 0}\} \cup \{\mathbb{R}_{\geq 0}\}$ und stetige Auszahlungsprozesse gezeigt.
Diese Reduktion des mehrfachen Optimierungsproblems auf ein klassisches Stoppproblem wird benutzt, um mit Hilfe bekannter Resultate aus der Stopptheorie $Z_n(0)$ in konkreten Situation zu bestimmen und mit bekannten Algorithmen den Wert $Z_n(0)$ zu approximieren, siehe z.B. P. Jaillet et al. [18], A. Thompson [32] und N. Meinshausen und B. M. Hambly [24].
In dieser Arbeit wird die Darstellung in (3) für die beiden folgenden Modellerweiterungen

des mehrfachen Optimierungsproblems bewiesen: In der ersten werden *Probleme des unendlich-fachen optimalen Stoppens* betrachtet, die man z.B. für die Bewertung einer amerikanischen Option mit unendlich vielen Ausübungsrechten benötigt. Der Inhaber eines solchen Finanzgutes hat das Recht eine Option, im Gegensatz zum obigen Beispiel, unendlich Mal auszuüben.
Die zweite Erweiterung beinhaltet n-fache Stoppprobleme, in denen die vorgeschriebene Mindestlänge zwischen den n zulässigen Ausübungsstrategien nicht deterministisch, sondern stochastisch ist. Diese *Optimierungsprobleme mit zufälligen Wartezeiten* sind von großer Relevanz, da sie häufig in den verschiedenen oben aufgelisteten Anwendungsbereichen der mehrfachen Stoppprobleme auftreten. Mit ihrer Hilfe können zum Beispiel in konkreten Situationen Mitarbeiteroptionen bewertet und Probleme aus dem Bereich der Produktions- und Projektplanung mit beschränkten Ressourcen modelliert werden.
Außerdem werden in dieser Arbeit die Zusammenhänge zwischen den optimalen Familien von $\mathfrak{F}$-Stoppzeiten $(\tau_1^*, ..., \tau_n^*)$ mit $Z_n(0) = E\Big(Y(\tau_1^*) + ... + Y(\tau_n^*)\Big)$ und den optimalen Stoppzeiten des Optimierungsproblems in (3) dargestellt und in der Markovschen Stoppsituation eine optimale Familie $(\tau_1^*, ..., \tau_n^*)$ konkret angegeben. Des Weiteren wird die Reduktion in (3) für $\mathcal{T} \in \{[0, T];\ T \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ und rechtsseitig-stetige Auszahlungsprozesse bewiesen und mit dessen Hilfe *mehrfache statistische Optimierungsprobleme* behandelt.

Nachdem die Schwerpunkte dieser Arbeit dargestellt wurden, wird nun näher auf die Struktur eingegangen, indem kurz der Inhalt der einzelnen Kapitel erläutert wird:

Im ersten Kapitel werden zu Beginn die verschiedenen am Markt gehandelten amerikanischen Optionen mit mehreren Ausübungsrechten beschrieben und in den einzelnen Beispielen wird näher auf die Wartezeit δ eingegangen. Danach wird für $\mathcal{T} = \mathbb{R}_{\geq 0}$ und rechtsseitig-stetige Auszahlungsprozesse kurz die Beweisidee von R. Carmona und S. Dayanik [6] für die Konstruktion von Y_n in (3) skizziert. Im letzten Abschnitt wird mit Hilfe dieser neuen Auszahlungsprozesse die Darstellung in (3) auf Optimierungsprobleme mit unendlich vielen Ausübungsstrategien übertragen, und es werden die Zusammenhänge zwischen den mehrfachen Stoppproblemen mit endlich und mit unendlich vielen Ausübungsstrategien dargestellt.

Im folgenden Kapitel wird auf den zweiten Teil des mehrfachen Stoppproblems, die Bestimmung einer Familie von Stoppzeiten $(\tau_1^*, ..., \tau_n^*)$ mit $Z_n(0) = E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i^*)\Big)$, eingegangen: Im ersten Abschnitt wird $(\tau_1^*, ..., \tau_n^*)$ mit Hilfe der Darstellung von $Z_n(0)$ in (3) für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ charakterisiert.
Anschließend wird in den beiden folgenden Abschnitten die Markovsche Stoppsituation

betrachtet: Zunächst werden die Resultate aus dem ersten Kapitel auf diese Situation übertragen und kurz skizziert, wie R. Carmona und S. Dayanik [6] den neuen Auszahlungsprozess Y_n in (3) durch *exzessive* Abbildungen darstellen. Abschließend werden die Zusammenhänge der durch die $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ induzierten Stoppgebiete herausgestellt und auf diesen Ergebnissen aufbauend eine optimale Familie von Stoppzeiten konkret angegeben.

Im dritten Kapitel wird ein kontinuierliches Modell mit endlichem Horizont betrachtet:
Zu Beginn werden drei Möglichkeiten beschrieben, die mehrfachen Stoppprobleme in diesem Modell zu formulieren, von denen im ersten Abschnitt zwei in ein mehrfaches Optimierungsproblem mit unendlichem Horizont, die in den ersten beiden Kapiteln behandelt wurden, überführt werden. Auf die dritte Definition der *mehrfachen Stoppprobleme mit endlichem Horizont* wird in den beiden folgenden Abschnitten eingegangen: Zunächst wird die Reduktion auf ein klassisches Optimierungsproblem in (3) übertragen und anschließend werden die Zusammenhänge zwischen den Stoppproblemen mit endlichem und unendlichem Horizont beschrieben.
Im letzten Abschnitt werden Auszahlungsprozesse der Form $X = Y - c$ betrachtet, die auch negative Werte annehmen können. Dabei beschreibt $c(\tau)$ die Kosten, die entstehen, wenn man mit der Strategie τ ausübt.

Im abschließenden Kapitel werden *mehrfache Stoppprobleme mit zufälligen Wartezeiten* betrachtet: Während in den vorherigen Kapitel zwischen den einzelnen Ausübungsstrategien ein Zeitfenster von einer fest vorgegebenen Länge $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ liegen muss, ist in diesem Kapitel die vorgegebene Länge eine zufällige Größe. Diese zufälligen Wartezeiten eines n-fachen Optimierungsproblems werden im ersten Teil durch nicht-negative Zufallsgrößen $\delta_1, ..., \delta_{n-1}$ modelliert. Dabei sei δ_i als die Wartezeit zu interpretieren, die der Inhaber einer Option mit n-Ausübungsrechten nach der i-ten Ausübung mindestens einhalten muss bevor er das nächste Recht wahrnehmen darf. In den Abschnitten 4.1 bis 4.4 werden wichtige Eigenschaften der mehrfachen Stoppprobleme mit zufälligen Wartezeiten bewiesen und die Ergebnisse aus den vorherigen Kapiteln übertragen. Die in diesen Abschnitten entwickelte allgemeine Theorie wird anschließend für den Auszahlungsprozess einer amerikanischen Put-Option spezifiziert.
Im zweiten Teil werden die zufälligen Wartezeiten mit Hilfe eines stochastischen Prozesses X modelliert: Das nächste Recht darf in diesem Modell erst dann ausgeübt werden, wenn sich der Prozess X vorher in einem fest vorgegebenen Zustand befunden hat. Im letzten Abschnitt wird die von L. Rogers [28, Theorem 2.1] bewiesene duale Darstellung des Stoppproblems mit einem Ausübungsrecht auf diese mehrfachen Optimierungsprobleme übertragen.

Kapitel 1

Mehrfaches optimales Stoppen

1.1 Modell

Es wird zunächst das kontinuierliche Modell aus der Theorie des klassischen optimalen Stoppproblems übernommen:

Modell 1.1. Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathfrak{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ eine Filtration, die die üblichen Bedingungen erfüllt, d.h. $\mathfrak{F}$ ist rechtsseitig-stetig und die σ-Algebra $\mathcal{F}_0 = \{F \in \mathcal{F};\ \mathcal{P}(F) \in \{0,1\}\}$. Außerdem sei $Y = (Y(t))_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ ein $\mathfrak{F}$-adaptierter, nichtnegativer und rechtsseitig-stetiger stochastischer Prozess mit der Eigenschaft

$$E\Big(\sup_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}} Y(t)\Big) < \infty, \tag{1.1}$$

$\mathcal{S}$ die Menge aller $\mathfrak{F}$-Stoppzeiten und

$$\mathcal{S}_\sigma := \{\tau \in \mathcal{S};\ \tau \geq \sigma\}$$

für alle $\sigma \in \mathcal{S}$. Definiere weiter $\mathcal{F}_\infty := \sigma\Big(\bigcup_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \mathcal{F}_t\Big)$ und $Y(+\infty) := \limsup Y$.
Für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ sei $Y(t)$ als die Auszahlung zu interpretieren, die der Inhaber einer amerikanischen Option bei Ausübung zum Zeitpunkt t erhält. Entsprechend dieser Interpretation wird Y als *Auszahlungsprozess* bezeichnet.

Es sei für den weiteren Verlauf eine Konstante $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ vorgegeben. Die folgende Definition beinhaltet die Ausübungsstrategien, über die in (1) das Supremum gebildet wird:

Definition 1.2. Definiere für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\sigma \in \mathcal{S}$

$$\mathcal{S}_\sigma^n(\delta) := \begin{cases} \{(\tau_1, ..., \tau_n);\ \tau_1 \in \mathcal{S}_\sigma,\ \forall i \in \{2, ..., n\} : \tau_i \in \mathcal{S}_{\tau_{i-1}+\delta}\}, & \text{falls } \delta > 0, \\ \{(\tau_1, ..., \tau_n) \in (\mathcal{S}_\sigma)^n;\ \tau_1 < ... < \tau_n\}, & \text{falls } \delta = 0, \end{cases}$$

und

$$Z_n^\delta(0) := \sup_{\tau \in S_0^n(\delta)} E\Big(Y(\tau_1) + ... + Y(\tau_n)\Big). \tag{1.2}$$

Um die folgenden Formeln übersichtlicher darzustellen, wird die Abhängigkeit von $\mathcal{S}_\sigma^n(\delta)$ und $Z_n^\delta(0)$ zur Konstanten δ nicht weiter notiert und für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\sigma \in \mathcal{S}$ kurz $\mathcal{S}_\sigma^n$ und $Z_n(0)$ geschrieben.
Die Konstante δ wird auch als *refracting time* bezeichnet und die Bedeutung dieser Größe für Anwendungen auf dem Finanzmarkt im folgenden Abschnitt beschrieben.

1.2 Beispiele

(i) **Mitarbeiteroptionen**

Als Mitarbeiteroptionen werden Aktienoptionen für Angestellte und insbesondere für Führungskräfte eines Unternehmens bezeichnet, die diesen das Recht geben, zu einem vorher festgelegten Preis K Aktien des eigenen Unternehmens zu erwerben, siehe R. DeFusco [10]. Mit dem Einsatz einer solchen variablen Vergütungskomponente sollen den Führungskräften Anreize geboten werden, im Rahmen der Unternehmensführung verstärkt die Interessen der Aktionäre zu berücksichtigen und auf eine Steigerung des Aktienkurses hinzuarbeiten. Damit die Führungskräfte auf eine langfristige Steigerung des Aktienkurses hinarbeiten, dürfen sie häufig nur einen Teil der erhaltenen Optionen auf einmal einlösen und müssen zwischen den einzelnen Ausübungszeitpunkten mindestens eine vorher festgelegte Wartezeit δ einhalten.
Ist die Anzahl der amerikanischen Optionen, die die Führungskraft als variable Vergütungskomponente erhält, $a \in n\mathbb{N}$, der Anteil der Optionen, die zu einem Zeitpunkt verkauft werden dürfen, $\frac{1}{n}$ und der Aktienkurs des Unternehmens der stochastische Prozess $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$, so ist im Black-Scholes-Modell mit Zinsrate ρ der faire Preis dieser variablen Vergütungskomponente

$$Z_n(0) = \sup_{(\tau_1,...,\tau_n) \in S_0^n} \sum_{i=1}^n e^{-\rho\tau_i} \, \frac{a}{n} \, E_Q\Big(\big(X(\tau_i) - K\big)^+\Big), \tag{1.3}$$

wobei mit Q das äquivalente Martingalmaß im Black-Scholes-Modell bezeichnet sei. In der Praxis ist die Wartezeit δ häufig ein Jahr und $n = 5$.
Für eine genauer Betrachtung der Mitarbeiteroptionen sei auf V. Henderson [16] und T. Leung und R. Sircar [23] verwiesen.

(ii) **Flexible Höchstzins-Optionen**

Eine Höchstzins-Option ist eine Zinsvereinbarung, die als eigenständiges Recht gehandelt wird. Der Käufer dieser Option zahlt eine Prämie dafür, dass ihm der Verkäufer bis zu einem Zeitpunkt T die Differenz zwischen einem vorher vereinbarten fixen Zinssatz und einem kontinuierlich beobachteten Marktzins vergütet, sobald der Marktzins den vereinbarten Zinssatz überschreitet, siehe R. Zagst [35, Chapter 4] und A. Pelsser [26, Chapter 8].
Bei der flexiblen Höchstzins-Option wird die Zinsperiode $[0, T]$ zunächst in äquidistante Teilperioden zerlegt. Der Käufer der flexiblen Option entscheidet jeweils zu Beginn einer Teilperiode, ob er die Sicherung dieser Zinsperiode durch eine Höchstzins-Option in Anspruch nehmen möchte, wobei insgesamt nur eine vorher festgelegte begrenzte Anzahl von Teilperioden abgesichert werden dürfen.
Bei dieser Option ist n die Anzahl der Teilperioden in denen man die Höchstzins-Option ausüben darf und δ die Länge der Teilperioden. Da der Inhaber der flexiblen Höchstzins-Option das letzte Mal zum Zeitpunkt $T - \delta$ ausüben darf, sind diese Optionen ein Beispiel für die in Kapitel 3 behandelten *mehrfach optimalen Stoppprobleme mit endlichem Horizont.*

(iii) **Swing-Optionen**

Swing-Optionen bieten auf dem Strommarkt die Möglichkeit, den vielseitigen Bedarf an Strom (Volumenrisiko) abzudecken und das Preisrisiko, dem die Teilnehmer des geöffneten Strommarktes ausgesetzt sind, sowohl auf der Verbraucher- als auch auf der Erzeugerseite zu steuern.
Die Besonderheiten des Strommarktes liegen darin begründet, dass Strom nur sehr eingeschränkt gespeichert werden kann und sowohl der Stromverbrauch als auch der Stromerzeugung aufgrund von Umwelteinflüssen starken Schwankungen unterliegen. So variieren die Strompreise im *Spothandel* je nach Tageszeit zwischen knapp 10 Euro/MWh und bis über 100 Euro/MWh. Neben den saisonalen Einflüssen sind beim Strompreis zudem rasante Preisanstiege mit einer sofortigen Rückkehr auf ein mittleres Niveau zu beobachten. Diese so genannten *Preisspikes* sind hauptsächlich auf Kapazitätsengpässe und kurzfristige Veränderung der Nachfrage zurückzuführen, siehe B. M. Hambly et al. [14].
Um die Volumen- und Preisrisiken zu minimieren, erhält der Käufer einer Swing-Option das Recht, eine bestimmte Anzahl von Stromeinheiten mehrmals jeweils zu unterschiedlichen Zeitpunkten zu einem festgelegten Preis zu kaufen oder zu verkaufen. Dabei sind die Ausübungsrechte einer Swing-Option in der Regel dadurch

eingeschränkt, dass der Inhaber das nächste Recht erst dann wahrnehmen kann, wenn der zuvor erworbene oder verkaufte Strom geliefert wurde. Die Lieferzeit δ entspricht häufig einem Tag.
Algorithmen zur Bewertung von Swing-Optionen und Modellierungen des Strompreises beinhalten zum Beispiel P. Jaillet et al. [18], E. Schwartz [30] und F. Benth et al. [5].

Ein weiterer Anwendungsbereich der in (1.2) definierten mehrfachen Optimierungsprobleme ist neben der Finanzmathematik die Produktions- und Projektplanung. Da für die Modellierung der mehrfachen Optimierungsprobleme in der Produktions- und Projektplanung das Modell 1.1 zunächst erweitert werden muss, wird dieser Anwendungsbereich erst im Abschnitt 3.5.2 beschrieben.

1.3 Überführung des mehrfachen Stoppproblems in ein klassisches Stoppproblem

In diesem Abschnitt wird der in (1.2) definierte Wert $Z_n(0)$ durch ein klassisches Optimierungsproblem dargestellt, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ ein Prozess $(Y_n(t))_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ mit

$$Z_n(0) = \sup_{\tau \in \mathcal{S}} Y_n(\tau) \tag{1.4}$$

konstruiert. Diese in Satz 1.10 aufgeführte Darstellung wurde von R. Carmona und S. Dayanik [6, Proposition 3.2] bewiesen. Deren Beweisidee wird im zweiten Teil dieses Abschnittes kurz skizziert, da sie in den folgenden Kapiteln auf die Modelle (3.2) und (4.8) übertragen wird. Des Weiteren werden in diesem Abschnitt die Eigenschaften von $Z_n(0)$ bewiesen, die man im Abschnitt 1.4 benötigt, um das n-fache Stoppproblem auf unendlich viele Ausübungsrechte zu übertragen.

Verschwindet die refracting time δ, so ist Y_n in (1.4) nach dem folgenden Satz gleich nY:

Satz 1.3. *Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:*

(i) $Z_1(0) \leq Z_n(0) \leq nZ_1(0)$.

(ii) Im Falle $\delta = 0$ ist $Z_n(0) = nZ_1(0)$, also insbesondere

$$Z_n(0) = \sup_{\tau \in \mathcal{S}} E\big(nY(\tau)\big). \tag{1.5}$$

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$.

Zu (i): Es gilt

$$\begin{aligned} Z_1(0) = \sup_{\tau \in \mathcal{S}} EY(\tau) &\leq \sup_{\tau \in \mathcal{S}} E\Big(Y(\tau) + Y\big(\tau + \delta + 1\big) + ... + Y(\tau + (n-1)(\delta+1))\Big) \\ &\leq \sup_{\tau \in \mathcal{S}_0^n} E\Big(Y(\tau_1) + ... + Y(\tau_n)\Big) = Z_n(0) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} Z_n(0) &= \sup_{\tau \in \mathcal{S}_0^n} E\Big(Y(\tau_1) + ... + Y(\tau_n)\Big) \leq \sup_{\tau_1,...,\tau_n \in \mathcal{S}} \sum_{i=1}^{n} EY(\tau_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sup_{\tau \in \mathcal{S}} EY(\tau) = nZ_1(0). \end{aligned}$$

Zu (ii): Es sei $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\sigma \in \mathcal{S}$ mit $Z_1(0) \leq E\big(Y(\sigma)\big) + \frac{\epsilon}{n}$. Mit der rechtsseitigen Stetigkeit von Y und dem Lemma von Fatou erhält man im Falle $\delta = 0$

$$\begin{aligned} nZ_1(0) &\leq nEY(\sigma) + \epsilon \\ &= E\Big(\lim_{m\to\infty} Y(\sigma) + Y(\sigma + \frac{1}{m}) + ... + Y(\sigma + \frac{n-1}{m})\Big) + \epsilon \\ &\leq \liminf_{m\to\infty} E\Big(Y(\sigma) + Y(\sigma + \frac{1}{m}) + ... + Y(\sigma + \frac{n-1}{m})\Big) + \epsilon \\ &\leq \sup_{\tau \in \mathcal{S}_0^n} E\Big(Y(\tau_1) + ... + Y(\tau_n)\Big) + \epsilon \\ &= Z_n(0) + \epsilon. \end{aligned}$$

Aus dieser Ungleichung resultiert zusammen mit (i) $Z_n(0) = nZ_1(0)$. □

Ist die refracting time $\delta \neq 0$, was von nun an zusätzlich vorausgesetzt sei, benötigt man für die Konstruktion von Y_n die

Definition 1.4. Es sei für alle $\sigma \in \mathcal{S}$

$$Z_0(\sigma) :\equiv 0 \quad \text{und} \quad Z_n(\sigma) := \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_\sigma^n} E\Big(\sum_{i=1}^{n} Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big). \tag{1.6}$$

Dieses kontinuierliche Modell ist nach dem folgenden Beispiel eine Verallgemeinerung des von C. Bender und J. Schoenmakers [4] und von N. Meinshausen und B. M. Hambly [24] betrachteten diskreten Modells:

Beispiel 1.5. Es sei $(X(j))_{j\in\mathbb{N}_0}$ ein $(\mathcal{G}_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$-adaptierter und nicht-negativer stochastischer Prozess. Dann wird durch

$$\tilde{\mathcal{F}}_t := \mathcal{G}_{\lfloor t \rfloor} \quad \text{und} \quad \tilde{Y}(t) := X(\lfloor t \rfloor)$$

eine rechtsseitig-stetige Filtration $\tilde{\mathfrak{F}} := (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ und ein rechtsseitig-stetiger, nicht-negativer und $\tilde{\mathfrak{F}}$-adaptierter stochastischer Prozess $\tilde{Y} := (\tilde{Y}(t))_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ definiert. Weiter gilt im Falle $Y = \tilde{Y}$, $\mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}}$ und $\delta = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$Z_n(t) = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}^n_{\lfloor t\rfloor}} E\Big(\sum_{i=1}^n X(\tau_i)\Big|\mathcal{G}_{\lfloor t\rfloor}\Big), \tag{1.7}$$

wobei $\mathcal{T}^n_j := \{\tau \in \mathcal{S}^n;\ j \leq \tau_1 < ... < \tau_n,\ \forall i \in \mathbb{N}_{\leq n} : \mathrm{Bild}(\tau_i) \subseteq \mathbb{N}_0\}$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Es gilt im Falle $Y = \tilde{Y}$, $\mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}}$ und $\delta = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}^n_t} E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_t\Big) = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}^n_t} E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\lfloor\tau_i\rfloor)\Big|\mathcal{F}_{\lfloor t\rfloor}\Big) \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}^n_{\lfloor t\rfloor}} E\Big(\sum_{i=1}^n X(\tau_i)\Big|\mathcal{G}_{\lfloor t\rfloor}\Big),$$

da für alle $\tau \in \mathcal{S}^n_t$ die Familie $(\lfloor\tau_1\rfloor, ..., \lfloor\tau_n\rfloor)$ in $\mathcal{T}^n_{\lfloor t\rfloor}$ enthalten ist. Weiter gilt unter diesen Voraussetzungen die Ungleichung

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}^n_{\lfloor t\rfloor}} E\Big(\sum_{i=1}^n X(\tau_i)\Big|\mathcal{G}_{\lfloor t\rfloor}\Big) = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}^n_{\lfloor t\rfloor}} E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i + t - \lfloor t\rfloor)\Big|\mathcal{F}_t\Big) \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}^n_t} E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_t\Big),$$

da für alle $\tau \in \mathcal{T}^n_{\lfloor t\rfloor}$ die Familie $(\tau_1 + t - \lfloor t\rfloor, ..., \tau_n + t - \lfloor t\rfloor)$ in $\mathcal{S}^n_t$ enthalten ist. $\square$

Anmerkung. Ein Beispiel für die in (1.7) definierten *diskreten mehrfachen Stoppprobleme* stellen die in 1.2.(ii) beschriebenen flexiblen Höchstzins-Optionen dar: Der Inhaber dieser Option kann nur zu Beginn jeder Teilperiode entscheiden, ob er diese absichern möchte.

Erste Eigenschaften von $Z_n(\sigma)$ beinhaltet das folgende Lemma. Die Aussagen (i) und (iii), die von R. Carmona und S. Dayanik [6, Lemma 3.1 und Lemma 3.2] bewiesen wurden, werden an dieser Stelle aufgeführt, da sie in den folgenden Kapiteln auf ein Modell mit endlichem Horizont und ein Modell mit zufälligen Wartezeiten übertragen werden.

Lemma 1.6. *Sei $\sigma \in \mathcal{S}$. Es gilt:*

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert $(\tau^k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{S}^n_\sigma)^{\mathbb{N}}$ mit $Z_n(\sigma) = \lim_{k\to\infty} \uparrow E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau^k_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big)$.

(ii) $Z_n(\sigma) = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}^n_\sigma,\ \mathrm{Bild}(\tau)\ \mathrm{abz.}} E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(iii) $E(Z_n(\tau)|\mathcal{F}_\sigma) \leq Z_n(\sigma)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $\tau \in \mathcal{S}_\sigma$.

(iv) $(Z_n(\sigma))_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine monoton steigende Folge von Zufallsvariablen mit

$$Z_{n+m}(\sigma) \leq Z_n(\sigma) + Z_m(\sigma) \quad \textit{für alle } n, m \in \mathbb{N}. \tag{1.8}$$

Beweis. Zu (ii): Sei $n \in \mathbb{N}$. Nach der Definition des essentiellen Supremums gilt

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_\sigma^n,\ \mathrm{Bild}(\tau)\ \mathrm{abz.}} E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_\sigma^n} E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) = Z_n(\sigma).$$

Sei nun $\tau \in \mathcal{S}_\sigma^n$. Es existiert für alle $i \in \mathbb{N}_{\leq n}$ eine Folge von Stoppzeiten $(\tau_k^i)_{k\in\mathbb{N}}$ mit abzählbarem Wertebereich und $\tau_k^i \downarrow \tau_i$ $\mathcal{P}$-fast sicher für $k \to \infty$. Definiere für alle $k \in \mathbb{N}$ rekursiv

$$\tilde{\tau}_k^1 := \tau_k^1 \quad \text{und} \quad \tilde{\tau}_k^{i+1} = \max\{\tilde{\tau}_k^i + \delta, \tau_k^{i+1}\}.$$

Dann ist für alle $k \in \mathbb{N}$ $(\tilde{\tau}_k^i)_{i\in\mathbb{N}_{\leq n}}$ in $\mathcal{S}_\sigma^n$ enthalten und $(\tilde{\tau}_k^i)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert für alle $i \in \mathbb{N}_{\leq n}$ $\mathcal{P}$-fast sicher gegen τ_i. Also folgt mit

$$E\Big[\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}\Big(\sum_{i=1}^n Y(t)\Big)\Big] = n\, E\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} Y(t)\Big) < \infty$$

und der majorisierten Konvergenz des bedingten Erwartungswertes

$$E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) = \lim_{k\to\infty} E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tilde{\tau}_k^i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\rho \in \mathcal{S}_\sigma^n,\ \mathrm{Bild}(\rho)\ \mathrm{abz.}} E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\rho_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big).$$

Zu (iv): Es resultiert unmittelbar aus der Definition 1.4 $Z_0(\sigma) = 0 \leq Z_1(\sigma)$,

$$\begin{aligned} Z_{n+1}(\sigma) &= \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_\sigma^{n+1}} E\Big(\sum_{i=1}^{n+1} Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \geq \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_\sigma^{n+1}} E\Big(\sum_{i=1}^{n} Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) = \\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_\sigma^{n}} E\Big(\sum_{i=1}^{n} Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) = Z_n(\sigma) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} Z_{n+m}(\sigma) &= \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_\sigma^{n+m}} E\Big(\sum_{i=1}^{n} Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) + E\Big(\sum_{j=n+1}^{n+m} Y(\tau_j)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \\ &\leq \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_\sigma^{n},\ \rho \in \mathcal{S}_\sigma^{m}} E\Big(\sum_{i=1}^{n} Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) + E\Big(\sum_{j=1}^{m} Y(\rho_j)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_\sigma^{n}} E\Big(\sum_{i=1}^{n} Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) + \operatorname*{ess\,sup}_{\rho \in \mathcal{S}_\sigma^{m}} E\Big(\sum_{j=1}^{m} Y(\rho_j)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \\ &= Z_n(\sigma) + Z_m(\sigma) \end{aligned}$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}$. □

Dabei wurde in Lemma 1.6 die folgende Schreibweise benutzt:

Schreibweise 1.7. Es seien X und Z messbare Abbildungen und $(X_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge von messbaren Abbildungen. Dann wird

(i) $X = Z$ für $\mathcal{P}(\{X = Z\}) = 1$ und entsprechendes für $\leq, <, \geq$ und $>$ geschrieben.

(ii) $\lim_{m\to\infty} X_m = X$ für $(X_m)_{m\in\mathbb{N}}$ konvergiert $\mathcal{P}$-fast sicher und $\mathcal{P}(\{\lim_{m\to\infty} X_m = X\}) = 1$ geschrieben.

Nach R. Carmona und S. Dayanik [6, Proposition 3.1] lässt sich $Z_{n+1}(\sigma)$ durch $Z_n(\sigma)$ folgendermaßen darstellen:

Satz 1.8. *Für alle $\sigma \in \mathcal{S}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$Z_{n+1}(\sigma) = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_\sigma} E\Big(Y(\tau) + E\big(Z_n(\tau+\delta)|\mathcal{F}_\tau\big)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big). \tag{1.9}$$

Die Gleichung (1.9) motiviert die folgende Definition, vgl. [6, Lemma 3.3]:

Definition und Lemma 1.9. *Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist der stochastische Prozess*

$$\Big(\overline{Z}_n(t)\Big)_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} := \Big(E(Z_n(t+\delta)|\mathcal{F}_t)\Big)_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} \tag{1.10}$$

ein Supermartingal.

Im folgenden Satz von R. Carmona und S. Dayanik [6, Proposition 3.2] wird das mehrfache Stoppproblem in ein klassisches Stoppproblem überführt. R. Carmona und S. Dayanik beweisen die erste Aussage durch vollständige Induktion über n und folgern daraus die zweite Aussage zusammen mit (1.9).

Satz 1.10. *Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ besitzt der Prozess $\overline{Z}_n$ eine $\mathfrak{F}$-adaptierte und rechtsseitig-stetige Modifikation $\overline{Z}_n^r$ mit*

(i) $E(Z_n(\tau+\delta)|\mathcal{F}_\tau) = \overline{Z}_n^r(\tau)$ *für alle $\tau \in \mathcal{S}$.*

(ii) $Y_{n+1} := Y + \overline{Z}_n^r$ *ist ein $\mathfrak{F}$-adaptierter rechtsseitig-stetiger Prozess mit*

$$Z_{n+1}(\sigma) = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_\sigma} E(Y_{n+1}(\tau)|\mathcal{F}_\sigma) \tag{1.11}$$

für alle $\sigma \in \mathcal{S}$.

Erste Eigenschaften des neuen Auszahlungsprozesses Y_n beinhaltet

Satz 1.11. *Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:*

(i) Ist die Zufallsgröße $\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} Z^\circ(t)$ integrierbar, so auch $\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} Y_n(t)$, wobei mit Z° das minimal dominierende rechtsseitig-stetige Supermartingal von Y bezeichnet sei..

(ii) Der Prozess Y_n liegt in der Klasse DL, d.h. die Menge $\{Y_n(\tau);\ \tau \in \mathcal{S}\}$ ist gleichgradig integrierbar.
Insbesondere liegt Y_n in der Klasse D, d.h. für alle $a \in \mathbb{R}_{>0}$ ist die Menge $\{Y_n(\tau);\ \tau \in \mathcal{S},\ \tau \leq a\}$ gleichgradig integrierbar.

Beweis. Zu (i): Es gilt nach Lemma 1.6.(iii) und (1.8) für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} E\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} Y_{n+1}(t)\Big) &= E\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} Y(t) + \overline{Z}_n^r(t)\Big) \\ &\leq E\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} Y(t)\Big) + E\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} \overline{Z}_n^r(t)\Big) \\ &= E\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} Y(t)\Big) + E\Big(\sup_{t\in\mathbb{Q}_{\geq 0}} E(Z_n(t+\delta)|\mathcal{F}_t)\Big) \\ &\leq E\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} Y(t)\Big) + E\Big(\sup_{t\in\mathbb{Q}_{\geq 0}} Z_n(t)\Big) \\ &\leq E\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} Y(t)\Big) + n\,E\Big(\sup_{t\in\mathbb{Q}_{\geq 0}} Z_1(t)\Big) \\ &= E\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} Y(t)\Big) + n\,E\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} Z^\circ(t)\Big). \end{aligned}$$

Daraus resultiert die erste Aussage zusammen mit (1.1).

Zu (ii): Da $\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} Y(t)$ integrierbar ist, liegt der Auszahlungsprozess Y in der Klasse DL. Weiter gilt nach Satz 1.10.(i) und Lemma 1.6.(iii)

$$0 \leq \overline{Z}_n^r(\tau) = E\Big(Z_n(\tau+\delta)\Big|\mathcal{F}_\tau\Big) \leq Z_n(\tau) \leq E\Big(n \sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} Y(t)\Big|\mathcal{F}_\tau\Big)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\tau \in \mathcal{S}$. Also liegt $\overline{Z}_n^r$ ebenfalls in der Klasse DL, woraus die obige Aussage zusammen mit der Abgeschlossenheit von DL bzgl. der komponentenweisen Addition resultiert. □

Wird Lemma 1.6.(iii) auf die Folge $(Y_n(\sigma))_{n\in\mathbb{N}}$ übertragen, so erhält man

Lemma 1.12. *Für alle $\sigma \in \mathcal{S}$ ist die Folge $(Y_n(\sigma))_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend mit*

$$Y_{n+m}(\sigma) \leq Y_n(\sigma) + Z_m(\sigma) \quad \textit{für alle } n, m \in \mathbb{N}. \tag{1.12}$$

Beweis. Sei $\sigma \in \mathcal{S}$. Es gilt nach Satz 1.10.(i) und Lemma 1.6.(iv) für alle $n, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} Y_{n+1}(\sigma) &= Y(\sigma) + \overline{Z}_n^r(\sigma) = Y(\sigma) + E(Z_n(\sigma+\delta)|\mathcal{F}_\sigma) \geq \\ &\geq Y(\sigma) + E(Z_{n-1}(\sigma+\delta)|\mathcal{F}_\sigma) = Y_n(\sigma) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & Y_{n+m}(\sigma) = Y(\sigma) + \overline{Z}_{n+m-1}^r(\sigma) = Y(\sigma) + E(Z_{n+m-1}(\sigma+\delta)|\mathcal{F}_\sigma) \leq \\ \leq\ & Y(\sigma) + E(Z_{n-1}(\sigma+\delta)|\mathcal{F}_\sigma) + E(Z_m(\sigma+\delta)|\mathcal{F}_\sigma) \leq Y_n(\sigma) + Z_m(\sigma), \end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung aus Lemma 1.6.(iii) resultiert. □

1.4 Stoppprobleme mit unendlich vielen Ausübungsrechten

Während in den vorherigen Abschnitten die Anzahl der verschiedenen Ausübungsrechte bei den mehrfachen Optimierungsproblemen endlich war, werden in diesem Abschnitt Stoppprobleme mit unendlich vielen Ausübungsrechten betrachtet. Das zugrundeliegende Modell in Definition 1.13 wurde von R. Carmona und N. Touzi [7, Chapter 4] für den Auszahlungsprozess eines amerikanischen Puts im Black-Scholes-Modell aufgestellt und die Aussage des Satzes 1.21 in diesem speziellen Fall bewiesen. Da R. Carmona und N. Touzi in deren Beweis die starke Markoveigenschaft des im Black-Scholes-Modell zugrunde liegenden Wienerprozesses anwenden, kann deren Beweisidee nicht für die in (1.13) definierten Stoppprobleme mit unendlich vielen Ausübungsrechten übernommen werden.

Es werden zunächst die Definitionen 1.2 und 1.4 auf den Fall "$n = +\infty$" übertragen:

Definition 1.13. Für alle $\sigma \in \mathcal{S}$ sei

(i) $\mathcal{S}_\sigma^\infty := \{\tau \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}};\ \tau_1 \in \mathcal{S}_\sigma,\ \forall i \in \mathbb{N}_{\geq 2} : \tau_i \in \mathcal{S}_{\tau_{i-1}+\delta}\}$ und

(ii)
$$Z_\infty(\sigma) := \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_\sigma^\infty} E\Big(\sum_{i=1}^{\infty} Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big). \tag{1.13}$$

Es sei weiter gefordert, dass der Auszahlungsprozess Y die Bedingung

$$c := E\Big(\sup_{t \in C} \sum_{i=1}^{\infty} Y(t_i)\Big) < \infty \tag{1.14}$$

erfüllt, wobei $C := \{t \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^{\mathbb{N}}\ ;\ \forall i \in \mathbb{N} : t_i + \delta \leq t_{i+1}\}$.

Sei $\sigma \in \mathcal{S}$. Möchte man mit Hilfe der Beweisidee von R. Carmona und S. Dayanik [6] die Gleichung (1.11) für den Fall "$n = +\infty$" beweisen, muss, wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, die Existenz eines rechtsseitig-stetigen Prozesses $(\overline{Z}_\infty^r(t))_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ mit

$$E(\overline{Z}_\infty^r(\tau + \delta)|\mathcal{F}_\tau) \quad \text{für alle } \tau \in \mathcal{S}$$

gezeigt werden. Für endliches n wird diese Aussage von R. Carmona und S. Dayanik durch Induktion über n mit den Induktionsvoraussetzungen

$$Z_{n+1}(\sigma) = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_\sigma} E((Y + \overline{Z}_n^r)(\tau)|\mathcal{F}_\sigma) \tag{1.15}$$

und

$$E(\overline{Z}_n^r(\tau+\delta)|\mathcal{F}_\tau) \quad \text{für alle } \tau \in \mathcal{S}$$

bewiesen. Da (1.15) im Falle "$n = +\infty$" die ursprünglich zu zeigende Gleichung

$$Z_\infty(\sigma) = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_\sigma} E((Y + \overline{Z}_\infty^r)(\tau)|\mathcal{F}_\sigma) \tag{1.16}$$

ist, kann deren Beweisidee nicht auf unendlich viele Ausübungsrechte angewendet werden. Stattdessen wird in diesem Abschnitt direkt gezeigt, dass der Grenzwert $\overline{Z}_\infty^r$ der Folge $(\overline{Z}_n^r)_{n\in\mathbb{N}}$ die Gleichung (1.16) erfüllt.

Die Bedingung (1.14) erfüllen folgende

Beispiele 1.14. Seien $\mu, \theta \in \mathbb{R}$, $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$ und $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ ein Wienerprozess. Es gilt:

(i) Für jeden nicht-negativen, beschränkten und rechtsseitig-stetigen stochastischen Prozess $(X(t))_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ ist

$$E\Big(\sup_{t\in C}\sum_{i=1}^\infty e^{-\rho t_i}X(t_i)\Big) < \infty.$$

(ii) Der Erwartungswert

$$E\Big(\sup_{t\in C}\sum_{i=1}^\infty e^{-\rho t_i}e^{\theta W_{t_i}+(\mu-\frac{\theta^2}{2})t_i}\Big)$$

ist genau dann endlich, wenn $\mu < \rho$.

Beweis. Zu (i): Es sei s eine obere Schranke von $(X(t))_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$. Mit der geometrischen Reihe erhält man

$$E\Big(\sup_{t\in C}\sum_{i=1}^\infty e^{-\rho t_i}X(t_i)\Big) \leq E\Big(\sup_{t\in C}\sum_{i=1}^\infty e^{-\rho t_i}s\Big) \leq s\sum_{i=1}^\infty e^{-\rho(i-1)\delta} < \infty.$$

Zu (ii) "$\Rightarrow$": Es gilt im Falle $\mu \geq \rho$

$$\begin{aligned}
E\Big(\sup_{t\in C}\sum_{i=1}^\infty e^{-\rho t_i}e^{\theta W_{t_i}+(\mu-\frac{\theta^2}{2})t_i}\Big) &= E\Big(\sup_{t\in C}\sum_{i=1}^\infty e^{(\mu-\rho)t_i}e^{\theta W_{t_i}-\frac{\theta^2}{2}t_i}\Big)\\
&\geq E\Big(\sum_{i=0}^\infty e^{(\mu-\rho)i\delta}e^{\theta W_{i\delta}-\frac{\theta^2}{2}i\delta}\Big)\\
&= \sum_{i=0}^\infty e^{(\mu-\rho)i\delta} = \infty.
\end{aligned}$$

Zu (ii) " $\Leftarrow$ ": Es gelte $\mu < \rho$. Dann existiert $p \in \mathbb{R}_{>1}$ mit $(p^2-p)\frac{\theta^2}{2} + \mu < \rho$. Mit der Gleichung

$$E\Big(e^{\theta W_t - \frac{\theta^2}{2}t}\Big)^p = e^{-\frac{p\theta^2}{2}t} E\Big(e^{p\theta W_t}\Big) = e^{-\frac{p\theta^2}{2}t} e^{\frac{p^2\theta^2}{2}t} = e^{(p^2-p)\frac{1}{2}\theta^2 t}$$

für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und der Doobschen Ungleichung erhält man

$$\begin{aligned}
& E\Big(\sup_{t\in C} \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\rho t_i} e^{\theta W_{t_i} + (\mu - \frac{\theta^2}{2})t_i}\Big) \\
= \;& E\Big(\sup_{t\in C} \sum_{i=1}^{\infty} e^{(\mu-\rho)t_i} e^{\theta W_{t_i} - \frac{\theta^2}{2}t_i}\Big) \\
\leq \;& E\Big(\sum_{i=0}^{\infty} \sup_{t\geq i\delta} e^{(\mu-\rho)t} e^{\theta W_t - \frac{\theta^2}{2}t}\Big) \\
\leq \;& E\Big(\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty} \sup_{j\delta\leq t\leq (j+1)\delta} e^{(\mu-\rho)t} e^{\theta W_t - \frac{\theta^2}{2}t}\Big) \\
\overset{\mu<\rho}{\leq} \;& \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty} e^{(\mu-\rho)j\delta} E\Big(\sup_{j\delta\leq t\leq (j+1)\delta} e^{\theta W_t - \frac{\theta^2}{2}t}\Big) \\
\leq \;& \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty} e^{(\mu-\rho)j\delta} E\Big(1+\Big(\sup_{j\delta\leq t\leq (j+1)\delta} e^{\theta W_t - \frac{\theta^2}{2}t}\Big)^p\Big) \\
\leq \;& \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty} e^{(\mu-\rho)j\delta} \Big(1+\Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p E\Big(e^{\theta W_{(j+1)\delta} - \frac{\theta^2}{2}(j+1)\delta}\Big)^p\Big) \\
= \;& \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty} e^{(\mu-\rho)j\delta} \Big(1+\Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p e^{(p^2-p)\frac{\theta^2}{2}(j+1)\delta}\Big) \\
= \;& \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty} e^{(\mu-\rho)j\delta} + \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty} e^{(\mu-\rho)j\delta}\Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p e^{(p^2-p)\frac{\theta^2}{2}(j+1)\delta} \\
= \;& \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty} e^{(\mu-\rho)j\delta} + \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p e^{(p^2-p)\frac{\theta^2}{2}\delta} \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty} e^{(\mu-\rho+(p^2-p)\frac{\theta^2}{2})j\delta}.
\end{aligned}$$

Da für alle $q \in]-1,1[$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty} q^j = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{q^i}{1-q} = \Big(\frac{1}{1-q}\Big)^2 < \infty$$

und $(p^2-p)\frac{\theta^2}{2} + \mu < \rho$, resultiert daraus die umgekehrte Implikation. □

Übertragen auf ein Black-Scholes-Modell erhält man die

Beispiele 1.15. Betrachtet werde ein Black-Scholes-Modell mit Zinsrate ρ, Trend μ und Aktienpreisprozess $(A(t))_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$. Weiter sei $K \in \mathbb{R}_{>0}$. Es erfüllt

(i) der abdiskontierte Auszahlungsprozess $Y(t) = e^{-\rho t}(K - A(t))^+$ eines amerikanischen Puts mit Ausübungspreis K die Bedingung (1.14).

(ii) im Falle $\mu < \rho$ der abdiskontierte Auszahlungsprozess $Y(t) = e^{-\rho t}(A(t) - K)^+$ eines amerikanischen Calls mit Ausübungspreis K ebenfalls (1.14).

Beweis. Die erste Aussage folgt aus Beispiel 1.14.(i) für $(X(t))_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} = ((K - A(t))^+)_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$. Ist $\mu < \rho$ und σ die Volatilität im Black-Scholes-Modell, gilt nach 1.14.(ii)

$$\begin{aligned} E\Big(\sup_{t\in C}\sum_{i=1}^{\infty} e^{-\rho t_i}(A(t_i) - K)^+\Big) &= E\Big(\sup_{t\in C}\sum_{i=1}^{\infty} e^{-\rho t_i}\Big(A(0)\, e^{\sigma W_{t_i} + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t_i} - K\Big)^+\Big) \\ &\leq A(0)\, E\Big(\sup_{t\in C}\sum_{i=1}^{\infty} e^{-\rho t_i} e^{\sigma W_{t_i} + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t_i}\Big) < \infty, \end{aligned}$$

wobei $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ ein Wienerprozess ist. □

Einen Zusammenhang zwischen $(Z_n(\sigma))_{n\in\mathbb{N}}$ und $Z_\infty(\sigma)$ sowie erste wichtige Eigenschaften von Z_∞ beinhaltet

Satz 1.16. *Für alle $\sigma \in \mathcal{S}$ gilt:*

(i)

$$\lim_{n\to\infty} \uparrow Z_n(\sigma) = Z_\infty(\sigma), \tag{1.17}$$

also insbesondere

$$\lim_{n\to\infty} EZ_n(\sigma) = EZ_\infty(\sigma) \tag{1.18}$$

und

$$EZ_\infty(\sigma) = \sup_{\tau\in\mathcal{S}_\sigma^\infty} E\Big(\sum_{i=1}^{\infty} Y(\tau_i)\Big). \tag{1.19}$$

(ii) $E(Z_\infty(\tau)|\mathcal{F}_\sigma) \leq Z_\infty(\sigma)$ für alle $\tau \in \mathcal{S}_\sigma$.

(iii) Die Familie von Zufallsgrößen $(Z_\infty(\tau))_{\tau\in\mathcal{S}}$ ist gleichgradig integrierbar.

Beweis. Sei $\sigma \in \mathcal{S}$.

Zu (1.17) "$\leq$": Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} Z_n(\sigma) &= \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_\sigma^n} E\Big(\sum_{i=1}^{n} Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_\sigma^\infty} E\Big(\sum_{i=1}^{n} Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \leq \\ &\leq \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_\sigma^\infty} E\Big(\sum_{i=1}^{\infty} Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) = Z_\infty(\sigma). \end{aligned}$$

Zu (1.17) " $\geq$ ": Nach Lemma 1.6.(iv) existiert $\lim_{n\to\infty} Z_n(\sigma)$. Weiter gilt nach der monotonen Konvergenz des bedingten Erwartungswertes für alle $\tau \in \mathcal{S}_\sigma^\infty$

$$E\Big(\sum_{i=1}^{\infty} Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) = \lim_{n\to\infty} E\Big(\sum_{i=1}^{n} Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \leq \lim_{n\to\infty} Z_n(\sigma).$$

Zu (1.18) und (1.19): Die Gleichung (1.18) erhält man unmittelbar aus (1.17). Daraus folgt zusammen mit Lemma 1.6.(i)

$$EZ_\infty(\sigma) = \lim_{n\to\infty} EZ_n(\sigma) = \lim_{n\to\infty} \sup_{\tau\in\mathcal{S}_\sigma^n} E\Big(\sum_{i=1}^{n} Y(\tau_i)\Big) \geq \sup_{\tau\in\mathcal{S}_\sigma^\infty} E\Big(\sum_{i=1}^{\infty} Y(\tau_i)\Big).$$

Zu (ii): Es gilt nach (i), der monotonen Konvergenz des bedingten Erwartungswertes und Lemma 1.6.(iii) für alle $\tau \in \mathcal{S}_\sigma$

$$E(Z_\infty(\tau)|\mathcal{F}_\sigma) = \lim_{n\to\infty} E(Z_n(\tau)|\mathcal{F}_\sigma) \leq \lim_{n\to\infty} Z_n(\sigma) = Z_\infty(\sigma).$$

Zu (iii): Es gilt für alle $\tau \in \mathcal{S}$

$$0 \leq Z_\infty(\tau) = \operatorname*{ess\,sup}_{\rho\in\mathcal{S}_\tau^\infty} E\Big(\sum_{i=1}^{\infty} Y(\rho_i)\Big|\mathcal{F}_\tau\Big) \leq E\Big(\sup_{t\in C} \sum_{i=1}^{\infty} Y(t_i)\Big|\mathcal{F}_\tau\Big).$$

Daraus resultiert die gleichgradige Integrierbarkeit von $(Z_\infty(\tau))_{\tau\in\mathcal{S}}$ aus der gleichgradigen Integrierbarkeit von $\Big(E\Big[\sup_{t\in C} \sum_{i=1}^{\infty} Y(t_i)\Big|\mathcal{F}_\tau\Big]\Big)_{\tau\in\mathcal{S}}$. □

Um Satz 1.10 auf ein Optimierungsproblem mit unendlich vielen Ausübungsrechten übertragen zu können, benötigt man

Lemma 1.17. *Sei* $EZ_\infty := (EZ_\infty(t))_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ *und* $EZ_n := (EZ_n(t))_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Es gilt mit diesen Bezeichnungen:*

(i) $\lim_{t\to\infty} EZ_\infty(t) = 0.$

(ii) $(EZ_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gleichmäßig gegen* EZ_∞, *d.h.*

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}\, \forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0} : EZ_\infty(t) - EZ_n(t) < \epsilon.$$

Beweis. Zu (i):

Annahme: $\lim_{t\to\infty} EZ_\infty(t) \neq 0$. Dann existiert $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \uparrow \infty$ für $n \to \infty$ und $EZ_\infty(a_n) \geq \epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter existiert nach Satz 1.16.(i) ein $n \in \mathbb{N}$ und $\tau \in \mathcal{S}_0^n$ mit

$$Z_\infty(0) \leq E\Big(\sum_{i=1}^{n} Y(\tau_i)\Big) + \epsilon/8 \tag{1.20}$$

und nach (1.19) für alle $m \in \mathbb{N}$ eine Folge τ^m aus $\mathcal{S}_{a_m}^\infty$ mit

$$\epsilon/2 \leq E\Big(\sum_{i=1}^{\infty} Y(\tau_i^m)\Big). \tag{1.21}$$

Definiere für alle $m \in \mathbb{N}$ die Menge $A_m := \{\tau_n \leq a_m - \delta\}$ und

$$\tilde{\tau}_i^m := \begin{cases} \tau_i, & \text{falls } i \leq n, \\ 1_{A_m}\ \tau_{i-n}^m \ + \ 1_{A_m^c}(\tau_n + i\delta), & \text{falls } i > n. \end{cases} \tag{1.22}$$

Da $P(A_m) \uparrow 1$ für $m \to \infty$ und die Folge $\Big(1_{A_m^c}\sum_{i=1}^{\infty} Y(\tau_i^m)\Big)_{m\in\mathbb{N}}$ nach Satz 1.16.(iii) gleichgradig integrierbar ist, gilt

$$\lim_{m\to\infty} E\Big(1_{A_m^c}\sum_{i=1}^{\infty} Y(\tau_i^m)\Big) = 0. \tag{1.23}$$

Weiter ist für alle $m \in \mathbb{N}$ und $i \in \mathbb{N}_{>n}$ die Menge A_m in $\mathcal{F}_{\tau_{i-n}^m} \cap \mathcal{F}_{\tau_n + i\delta}$ enthalten. Also wird durch $\tilde{\tau}^m := (\tilde{\tau}_j^m)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Stoppzeiten definiert, für die nach Definition (1.22) gilt

$$0 \leq \tilde{\tau}_1^m \quad \text{und} \quad \forall i \in \mathbb{N} : \tilde{\tau}_i^m + \delta \leq \tilde{\tau}_{i+1}^m.$$

Folglich ist für alle $m \in \mathbb{N}$ die Folge $\tilde{\tau}^m$ ein Element aus $\mathcal{S}_0^\infty$ und man erhält mit (1.22) und (1.20) die Ungleichung

$$\begin{aligned} E\Big(\sum_{i=1}^{\infty} Y(\tilde{\tau}_i^m)\Big) &= E\Big(\sum_{i=1}^{n} Y(\tilde{\tau}_i^m)\Big) + E\Big(\sum_{i=n+1}^{\infty} Y(\tilde{\tau}_i^m)\Big) \\ &= E\Big(\sum_{i=1}^{n} Y(\tau_i)\Big) + E\Big[\sum_{i=1}^{\infty} Y\Big(1_{A_m}\ \tau_i^m \ + \ 1_{A_m^c}(\tau_n + i\delta)\Big)\Big] \\ &= E\Big(\sum_{i=1}^{n} Y(\tau_i)\Big) + E\Big(\sum_{i=1}^{\infty} 1_{A_m}\ Y(\tau_i^m) \ + \ 1_{A_m^c}\ Y(\tau_n + i\delta)\Big) \\ &\geq E\Big(\sum_{i=1}^{n} Y(\tau_i)\Big) + E\Big(1_{A_m}\sum_{i=1}^{\infty} Y(\tau_i^m)\Big) \\ &\geq Z_\infty(0) - \epsilon/8 \ + \ E\Big(1_{A_m}\sum_{i=1}^{\infty} Y(\tau_i^m)\Big). \end{aligned}$$

Nach (1.23) existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$E\Big(\sum_{i=1}^{\infty} Y(\tau_i^m)\Big) \leq E\Big(1_{A_m}\sum_{i=1}^{\infty} Y(\tau_i^m)\Big) + \epsilon/4,$$

woraus zusammen mit obiger Ungleichung und (1.21)

$$\begin{aligned} E\Big(\sum_{i=1}^{\infty} Y(\tilde{\tau}_i^m)\Big) &\geq Z_\infty(0) - \epsilon/8 + E\Big(1_{A_m} \sum_{i=1}^{\infty} Y(\tau_i^m)\Big) \\ &\geq Z_\infty(0) - \epsilon/8 + E\Big(\sum_{i=1}^{\infty} Y(\tau_i^m)\Big) - \epsilon/4 \\ &\geq Z_\infty(0) - \epsilon/8 + \epsilon/2 - \epsilon/4 \\ &= Z_\infty(0) + \epsilon/8. \end{aligned}$$

resultiert. Dieses ist ein Widerspruch zu $\tilde{\tau}^m \in \mathcal{S}_0^\infty$.

Zu (ii): Sei $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Es existiert nach (i) $s \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$EZ_\infty(s) < \epsilon/2. \tag{1.24}$$

Weiter existiert für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Folge von Stoppzeiten $\tau \in \mathcal{S}_t^\infty$ mit

$$EZ_\infty(t) < E\Big(\sum_{i=1}^{\infty} Y(\tau_i)\Big) + \epsilon/2. \tag{1.25}$$

Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0\delta \geq s$, $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ und $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Es gilt für die Folge von Stoppzeiten $\tau \in \mathcal{S}_t^\infty$ wie in (1.25)

$$\begin{aligned} EZ_\infty(t) &< E\Big(\sum_{i=1}^{\infty} Y(\tau_i)\Big) + \epsilon/2 \\ &= E\Big(\sum_{i=1}^{n} Y(\tau_i)\Big) + E\Big(\sum_{i=n+1}^{\infty} Y(\tau_i)\Big) + \epsilon/2 \\ &\overset{n\delta \geq s}{\leq} E\Big(\sum_{i=1}^{n} Y(\tau_i)\Big) + E(Z_\infty(s)) + \epsilon/2 \\ &\overset{(1.24)}{<} E\Big(\sum_{i=1}^{n} Y(\tau_i)\Big) + \epsilon/2 + \epsilon/2 \\ &\leq EZ_n(t) + \epsilon. \end{aligned}$$

□

Weiter wird im Beweis von Satz 1.21 Lemma 1.19 aus der allgemeinen Theorie über kontinuierliche Martingale angewendet. Um es im dritten Kapitel ebenfalls auf das Modell (3.2) anwenden zu können, wird das Lemma für *monoton steigende* Supermartingale im Sinne der foldenden Definition formuliert:

Definition 1.18. Es seien $I_1 \subseteq I_2 \subseteq ... \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$. Eine Folge von reellwertigen stochastischen Prozessen $(X^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $X^{(n)} = \Big(X^{(n)}(t)\Big)_{t \in I_n}$ heißt *monoton steigend*, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t \in I_n$ gilt

$$X^{(n)}(t) \leq X^{(n+1)}(t). \tag{1.26}$$

Lemma 1.19. *Es seien* $I_1 \subseteq I_2 \subseteq ... \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ *Intervalle mit* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n = \mathbb{R}_{\geq 0}$. *Weiter sei* $(X^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $X^{(n)} = \Big(X^{(n)}(t)\Big)_{t\in I_n}$ *eine monoton steigende Folge von nach unten beschränkten und rechtsseitig-stetigen Supermartingalen so, dass für alle* $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ *die Zufallsvariable* $\xi(t) := \lim\limits_{n\to\infty} X^{(n)}(t)$ *integrierbar ist. Dann ist* $(\xi(t))_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ *ein Supermartingal und besitzt eine rechtsseitig-stetige Modifikation.*

Beweis. Es gilt für alle $s, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $s < t$

$$E(\xi(t)|\mathcal{F}_s) = E(\lim_{n\to\infty} \uparrow X^{(n)}(t)|\mathcal{F}_s) = \lim_{n\to\infty} E(X^{(n)}(t)|\mathcal{F}_s) \leq \lim_{n\to\infty} X^{(n)}(s) = \xi(s).$$

Also reicht es nach I. Karatzas und S. Shreve [20, Theorem 3.13] für den Existenzbeweis einer rechtsseitig-stetigen Modifikation von ξ zu zeigen, dass die Abbildung

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad t \mapsto E\xi(t)$$

rechtsseitig-stetig ist. Sei also $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^{\mathbb{N}}$ mit $a_n \downarrow a$ für $n \to \infty$. Definiere $k := \min\{m \in \mathbb{N};\ a, a_1, a_2, ... \in I_m\}$. Da $\Big(E\xi(a_n)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton steigende und durch $E\xi(a)$ beschränkte Folge ist, existiert $\lim\limits_{n\to\infty} E\xi(a_n)$ und es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} E\xi(a_n) &= \sup_{n\in\mathbb{N}} E\xi(a_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\Big(\lim_{m\to\infty} EX^{(m)}(a_n)\Big) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\Big(\sup_{m\in\mathbb{N}_{\geq k}} EX^{(m)}(a_n)\Big) = \\ &= \sup_{m\in\mathbb{N}_{\geq k}}\Big(\sup_{n\in\mathbb{N}} EX^{(m)}(a_n)\Big) = \sup_{m\in\mathbb{N}_{\geq k}} EX^{(m)}(a) = E\xi(a).\end{aligned}$$ □

Als nächstes wird Lemma 1.9 auf den Fall "$n = +\infty$" übertragen:

Definition und Lemma 1.20. *Der* $\mathfrak{F}$*-adaptierte stochastische Prozess*

$$\Big(\overline{Z}_\infty(t)\Big)_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} := \Big(E(Z_\infty(t+\delta)|\mathcal{F}_t)\Big)_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} \tag{1.27}$$

ist ein Supermartingal und besitzt ein Potential $\overline{Z}^r_\infty$ *als Modifikation, d.h. ein rechtsseitig-stetiges und nicht-negatives Supermartingal mit* $\lim\limits_{t\to\infty} E(\overline{Z}^r_\infty(t)) = 0$, *das die folgenden Eigenschaften erfüllt:*

(i) $\overline{Z}^r_n \leq \overline{Z}^r_\infty$, *d.h.* $\bigcup\limits_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} \{\overline{Z}^r_n(t) > \overline{Z}^r_\infty(t)\}$ *ist eine* $\mathcal{P}$*-Nullmenge für alle* $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \uparrow \overline{Z}^r_n(t) = \overline{Z}^r_\infty(t)$ *für alle* $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

(iii) $\overline{Z}^r_\infty(t) \to 0$ $\mathcal{P}$*-fast sicher für* $t \to \infty$.

(iv) Die Familie $(\overline{Z}^r_\infty(\tau))_{\tau\in\{\sigma\in\mathcal{S};\ \mathrm{Bild}(\sigma)\ \mathrm{abz.}\}}$ *ist gleichgradig integrierbar.*

Beweis. Es gilt für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\lim_{n\to\infty} \uparrow \overline{Z}_n^r(t) = \lim_{n\to\infty} \uparrow E\Big(Z_n(t+\delta)\Big|\mathcal{F}_t\Big) \overset{(1.17)}{=} E\Big(Z_\infty(t+\delta)\Big|\mathcal{F}_t\Big) = \overline{Z}_\infty(t). \tag{1.28}$$

Also ist nach Lemma 1.19 $\overline{Z}_\infty$ ein Supermartingal und besitzt eine rechtsseitig-stetige Modifikation $\overline{Z}_\infty^r$, für die man zusammen mit Lemma 1.17.(i) die Gleichung

$$\lim_{t\to\infty} E\overline{Z}_\infty^r(t) = \lim_{t\to\infty} E\Big(E(Z_\infty(t+\delta)|\mathcal{F}_t)\Big) = \lim_{t\to\infty} EZ_\infty(t+\delta) = \lim_{t\to\infty} EZ_\infty(t) = 0$$

erhält.

Zu (i): Nach (1.28) gilt $\overline{Z}_n^r(t) \leq \overline{Z}_\infty^r(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $n \in \mathbb{N}$. Also ist

$$\bigcup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} \{\overline{Z}_n^r(t) > \overline{Z}_\infty^r(t)\} = \bigcup_{t\in\mathbb{Q}_{\geq 0}} \{\overline{Z}_n^r(t) > \overline{Z}_\infty^r(t)\}$$

als abzählbare Vereinigung von $\mathcal{P}$-Nullmengen ebenfalls eine $\mathcal{P}$-Nullmenge.

Zu (ii): Die Aussage (ii) resultiert unmittelbar aus (1.28).

Zu (iii): Nach dem Konvergenzsatz für Supermartingale [21, Theorem 3.15] existiert $\overline{Z}_\infty^r(\infty) := \lim_{t\to\infty} \overline{Z}_\infty^r(t)$. Da $E\overline{Z}_\infty^r(\infty) = \lim_{t\to\infty} E\overline{Z}_\infty^r(t) = 0$, verschwindet $\overline{Z}_\infty^r(\infty) \geq 0$ $\mathcal{P}$-fast sicher.

Zu (iv): Mit Satz 1.16.(ii) folgt für alle $\tau \in \{\sigma \in \mathcal{S};\ \mathrm{Bild}(\sigma)\,\mathrm{abz.}\}$

$$0 \leq \overline{Z}_\infty^r(\tau) = E(Z_\infty(\tau+\delta)|\mathcal{F}_\tau) \leq Z_\infty(\tau).$$

Daraus erhält man die gleichgradige Integrierbarkeit von $(\overline{Z}_\infty^r(\tau))_{\tau\in\{\sigma\in\mathcal{S};\ \mathrm{Bild}(\sigma)\,\mathrm{abz.}\}}$ zusammen mit Satz 1.16.(iii). □

Nach Folgerung 1.22.(ii) ist die Aussage von Lemma 1.20.(iv) auch für beliebige Stoppzeiten gültig.

Mit den vorherigen Hilfssätzen wird im folgenden Hauptsatz dieses Abschnittes der Satz 1.10 auf ein Stoppproblem mit unendlich vielen Ausübungsrechten übertragen:

Satz 1.21. *Für den $\mathfrak{F}$-adaptierten und rechtsseitig-stetigen Prozess $Y_\infty := Y + \overline{Z}_\infty^r$ gilt:*

(i) $\lim_{n\to\infty} \uparrow Y_n(t) = Y_\infty(t)$ *für alle* $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

(ii)

$$Z_\infty(\sigma) = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_\sigma} E(Y_\infty(\tau)|\mathcal{F}_\sigma) \tag{1.29}$$

für alle $\sigma \in \mathcal{S}$.

Beweis. Die erste Aussage erhält man unmittelbar mit Lemma 1.20.(ii).

Zu (ii) " $\leq$ ": Nach Satz 1.16.(i), (1.11) und Lemma 1.20.(i) gilt

$$Z_\infty(\sigma) = \lim_{n\to\infty} \uparrow Z_n(\sigma) = \lim_{n\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_\sigma} E(Y_n(\tau)|\mathcal{F}_\sigma) \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_\sigma} E(Y_\infty(\tau)|\mathcal{F}_\sigma)$$

für alle $\sigma \in \mathcal{S}$.

Zu (ii) " $\geq$ ": Sei $\sigma \in \mathcal{S}$ und $\tau \in \mathcal{S}_\sigma$. Es existiert eine Folge von Stoppzeiten $(\tau_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit abzählbarem Wertebereich und $\tau_k \downarrow \tau$ für $k \to \infty$. Nach Lemma 1.20.(iv) ist $\mathcal{L}^1\text{-}\lim_{k\to\infty} Y_\infty(\tau_k) = Y_\infty(\tau)$, d.h.

$$\lim_{k\to\infty} \int |Y_\infty(\tau) - Y_\infty(\tau_k)| = 0,$$

und somit $\mathcal{L}^1\text{-}\lim_{k\to\infty} E(Y_\infty(\tau_k)|\mathcal{F}_\sigma) = E(Y_\infty(\tau)|\mathcal{F}_\sigma)$. Also existiert eine Teilfolge $(\tau_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ von $(\tau_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{i\to\infty} E(Y_\infty(\tau_{k_i})|\mathcal{F}_\sigma) = E(Y_\infty(\tau)|\mathcal{F}_\sigma)$, woraus zusammen mit (i), (1.11) und (1.17) die Ungleichung

$$\begin{aligned} E(Y_\infty(\tau)|\mathcal{F}_\sigma) &= \lim_{i\to\infty} E(Y_\infty(\tau_{k_i})|\mathcal{F}_\sigma) = \lim_{i\to\infty} \Big(\lim_{n\to\infty} \uparrow E(Y_n(\tau_{k_i})|\mathcal{F}_\sigma)\Big) \leq \\ &\leq \lim_{i\to\infty} \lim_{n\to\infty} Z_n(\sigma) \leq Z_\infty(\sigma) \end{aligned}$$

resultiert. □

Mit (1.29) erhält man folgende Verallgemeinerung von Satz 1.21.(i):

Folgerung 1.22. *Für jede Stoppzeit τ gilt:*

(i) $\overline{Z}^r_\infty(\tau) = E(Z_\infty(\tau+\delta)|\mathcal{F}_\tau)$.

(ii) $(\overline{Z}^r_\infty(\sigma))_{\sigma\in\mathcal{S}}$ *ist gleichgradig integrierbar.*

(iii) $\lim_{n\to\infty} \uparrow Y_n(\tau) = Y_\infty(\tau)$.

Beweis. *Zu (i) :* Es wir die Beweisidee von R. Carmona und S. Dayanik [6, Proposition 3.2.(i)] übertragen: Da

$$\sup_{\tau\in\mathcal{S}} E(Y_\infty(\tau)) = Z_\infty(0) \leq c < \infty,$$

existiert nach (1.29) und G. Peskir und A. Shiryaev [27, Theorem 2.2] das minimal dominierende rechtsseitig-stetige Supermartingal Z^r_∞ von Y_∞. Für dieses gilt nach den Eigenschaften des minimal dominierenden Supermartingals

$$Z^r_\infty(\sigma) = Z_\infty(\sigma) \quad \text{für alle } \sigma \in \mathcal{S}. \tag{1.30}$$

Sei $\tau \in \mathcal{S}$. Es existiert eine Folge von Stoppzeiten $(\tau_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit abzählbarem Wertebereich und $\tau_k \downarrow \tau$ für $k \to \infty$. Daraus erhält man zusammen mit dem allgemeinen Optional-Sampling-Theorem für nicht-negative Supermartingale nach I. Karatzas und S. Shreve [20, Theorem 3.22] und dem Lemma von Fatou

$$\limsup_{k\to\infty} \int_A \overline{Z}^r_\infty(\tau_k)d\mathcal{P} \le \int_A \overline{Z}^r_\infty(\tau)d\mathcal{P} \le \liminf_{k\to\infty} \int_A \overline{Z}^r_\infty(\tau_k)d\mathcal{P},$$

also

$$\int_A \overline{Z}^r_\infty(\tau)d\mathcal{P} = \lim_{k\to\infty} \int_A \overline{Z}^r_\infty(\tau_k)d\mathcal{P} \quad \text{für alle } A \in \mathcal{F}_\tau \tag{1.31}$$

und analog

$$\int_A Z^r_\infty(\tau+\delta)d\mathcal{P} = \lim_{k\to\infty} \int_A Z^r_\infty(\tau_k+\delta)d\mathcal{P} \quad \text{für alle } A \in \mathcal{F}_\tau. \tag{1.32}$$

Weiter resultiert aus dem abzählbaren Bildbereich von τ_k für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\overline{Z}_\infty(\tau_k) = E(Z_\infty(\tau_k+\delta)|\mathcal{F}_{\tau_k}),$$

also für alle $A \in \mathcal{F}_\tau$

$$\begin{aligned}\int_A \overline{Z}^r_\infty(\tau_k)d\mathcal{P} &= \int_A \overline{Z}_\infty(\tau_k)d\mathcal{P} = \int_A E(Z_\infty(\tau_k+\delta)|\mathcal{F}_{\tau_k})d\mathcal{P} = \\ &= \int_A Z_\infty(\tau_k+\delta)d\mathcal{P} = \int_A Z^r_\infty(\tau_k+\delta)d\mathcal{P}.\end{aligned}$$

Daraus erhält man zusammen mit (1.31), (1.32) und (1.30)

$$\int_A \overline{Z}^r_\infty(\tau)d\mathcal{P} = \int_A Z^r_\infty(\tau+\delta)d\mathcal{P} = \int_A Z_\infty(\tau+\delta)d\mathcal{P} \quad \text{für alle } A \in \mathcal{F}_\tau.$$

Zu (ii): Analog zum Beweis von Lemma 1.20.(iv) resultiert die gleichgradige Integrierbarkeit von $(\overline{Z}^r_\infty(\sigma))_{\sigma\in\mathcal{S}}$ aus $0 \le \overline{Z}^r_\infty(\sigma) = E(Z_\infty(\sigma+\delta)|\mathcal{F}_\sigma) \le Z_\infty(\sigma)$ für jede Stoppzeit σ.

Zu (iii): Es gilt nach 1.12, 1.10.(i), (1.17) und der ersten Aussage für alle $\tau \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \uparrow Y_n(\tau) &= Y(\tau) + \lim_{n\to\infty} \uparrow E(Z_{n-1}(\tau+\delta)|\mathcal{F}_\tau) \\ &= Y(\tau) + E(Z_\infty(\tau+\delta)|\mathcal{F}_\tau) = Y_\infty(\tau).\end{aligned}$$

□

Kapitel 2

Optimale Stoppzeiten und Stoppgebiete

Generalvoraussetzung. *Es sei für dieses Kapitel weiter das Modell 1.1 gegeben.*

Im ersten Kapitel wurde für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ der erste Teil des Problems des n-fachen optimalen Stoppens, die Bestimmung des Wertes $Z_n(0)$, auf ein Optimierungsproblem mit einem Ausübungsrecht reduziert. In diesem Kapitel wird auf den zweiten Teil, die Bestimmung einer Familie von Stoppzeiten $\tau^* \in \mathcal{S}_0^n$ mit $Z_n(0) = E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i^*)\Big)$, eingegangen: Zu Beginn werden für endliches n die Zusammenhänge zwischen den optimalen Familien von Stoppzeiten für das Optimierungsproblem (1.6), d.h. alle $\tau^* \in \mathcal{S}_\sigma^n$ mit

$$Z_n(\sigma) = E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i^*)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big), \tag{2.1}$$

und den optimalen Stoppzeiten für das Optimierungsproblem (1.11) dargestellt und anschließend auf den Fall "$n = +\infty$" übertragen.
In den beiden folgenden Abschnitten wird das mehrfache Optimierungsproblem in der Markovschen Stoppsituation betrachtet: In Abschnitt 2.2 werden zunächst die Ergebnisse aus dem ersten Kapitel auf diese Stoppsituation übertragen und die neuen Eigenschaften des in Satz 1.10 definierten Auszahlungsprozesses Y_n beschrieben. Mit Hilfe der Ergebnisse aus den vorherigen Abschnitten wird anschließend eine optimale Familie von Stoppzeiten für die Optimierungsprobleme (1.6) und (1.13) konkret angegeben. Es sei weiter angemerkt, dass diese konkrete Darstellung für endliches n von R. Carmona und S. Dayanik [6, Proposition 5.4] für den Fall bewiesen wurde, dass der in Abschnitt 2.2 definierte Prozess X eine lineare Diffusion ist.

2.1 Optimale Stoppzeiten

Es seien die Anzahl der Ausübungsrechte $n \in \mathbb{N}$ und $\sigma \in \mathcal{S}$ fixiert. In diesem Abschnitt werden die Eigenschaften der optimalen Familien von Stoppzeiten $\tau^* \in \mathcal{S}_\sigma^n$ für das Optimierungsproblem (1.6) bewiesen, die man neben den bereits bekannten Resultaten benötigt, um im Abschnitt 2.3 eine optimale Familie in der Markovschen Stoppsituation konkret anzugeben. Es wird ohne zusätzliche Voraussetzungen an den Auszahlungsprozess Y gezeigt, dass man τ^* mit Hilfe von n optimalen Stoppzeiten eines klassischen Optimierungsproblems konstruieren kann.

Einen ersten Zusammenhang zwischen den optimalen Familien von Stoppzeiten für das Optimierungsproblem (1.6) und den optimalen Stoppzeiten für das Optimierungsproblem (1.11) beinhaltet

Lemma 2.1. *Ist $\tau^* \in \mathcal{S}_\sigma^n$ optimal für das Optimierungsproblem (1.6), so ist*

$$Z_{n-i}(\tau_i^* + \delta) = E\Big(\sum_{j=i+1}^{n} Y(\tau_j^*)\Big|\mathcal{F}_{\tau_i^*+\delta}\Big) \tag{2.2}$$

für alle $i \in \mathbb{N}_{<n}$.

Beweis. Es sei $\tau^* \in \mathcal{S}_\sigma^n$ optimal für das Optimierungsproblem (1.6) und $i \in \mathbb{N}_{<n}$.

<u>" $\geq$ ":</u> Da $(\tau_{i+1}^*, ..., \tau_n^*) \in \mathcal{S}_{\tau_i^*+\delta}^{n-i}$, resultiert diese Abschätzung direkt aus der Definition des essentiellen Supremums.

<u>" $\leq$ ":</u> <u>*Annahme :*</u> $\mathcal{P}\Big(\Big\{Z_{n-i}(\tau_i^* + \delta) > E\Big(\sum_{j=i+1}^{n} Y(\tau_j^*)\Big|\mathcal{F}_{\tau_i^*+\delta}\Big)\Big\}\Big) > 0.$

Dann existiert nach der bereits bewiesenen Ungleichung und Lemma 1.6.(i) eine Familie von Stoppzeiten $\rho \in \mathcal{S}_{\tau_i^*+\delta}^{n-i}$ mit

$$E\Big(\sum_{j=1}^{n-i} Y(\rho_j)\Big) > E\Big(\sum_{j=i+1}^{n} Y(\tau_j^*)\Big).$$

Also gilt für $\nu := (\tau_1^*, ..., \tau_i^*, \rho_1, ..., \rho_{n-i})$

$$E\Big(\sum_{j=1}^{n} Y(\nu_j)\Big) > E\Big(\sum_{j=1}^{i} Y(\tau_j^*)\Big) + E\Big(\sum_{j=i+1}^{n} Y(\tau_j^*)\Big) = E(Z_n(\sigma)).$$

Dieses ist ein Widerspruch zu $\nu \in \mathcal{S}_\sigma^n$. □

Damit erhält man folgende Charakterisierung von $\tau^* \in \mathcal{S}_\sigma^n$:

Satz 2.2. *Eine Familie von Stoppzeiten $\tau^* \in \mathcal{S}_\sigma^n$ ist für das Optimierungsproblem (1.6) genau dann optimal, wenn die Bedingungen*

$$\tau_1^* \text{ ist optimal für das Optimierungsproblem (1.11), d.h. } Z_n(\sigma) = E(Y_n(\tau_1^*)|\mathcal{F}_\sigma) \quad (2.3)$$

und

$$Z_{n-i}(\tau_i^* + \delta) = E\Big(Y_{n-i}(\tau_{i+1}^*)\Big|\mathcal{F}_{\tau_i^*+\delta}\Big) \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}_{<n} \quad (2.4)$$

erfüllt sind.

Beweis. "$\Rightarrow$": Es sei $\tau^* \in \mathcal{S}_\sigma^n$ optimal für das Optimierungsproblem (1.6). Nach Lemma 2.1 und Satz 1.10.(i) gilt

$$\begin{aligned}
Z_n(\sigma) &= E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i^*)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \\
&= E\Big(Y(\tau_1^*)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) + E\Big(E\Big[\sum_{i=2}^n Y(\tau_i^*)\Big|\mathcal{F}_{\tau_1^*+\delta}\Big]\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \\
&= E\Big(Y(\tau_1^*)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) + E\Big(Z_{n-1}(\tau_1^*+\delta)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \\
&= E\Big(Y(\tau_1^*) \ + \ E\Big[Z_{n-1}(\tau_1^*+\delta)\Big|\mathcal{F}_{\tau_1^*}\Big]\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \\
&= E\Big(Y(\tau_1^*) \ + \ \overline{Z}_{n-1}^r(\tau_1^*)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \\
&= E\Big(Y_n(\tau_1^*)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big)
\end{aligned}$$

und analog für alle $i \in \mathbb{N}_{<n}$

$$\begin{aligned}
Z_{n-i}(\tau_i^*+\delta) &= E\Big(\sum_{j=i+1}^n Y(\tau_j^*)\Big|\mathcal{F}_{\tau_i^*+\delta}\Big) \\
&= E\Big(Y(\tau_{i+1}^*)\Big|\mathcal{F}_{\tau_i^*+\delta}\Big) + E\Big(E\Big[\sum_{j=i+2}^n Y(\tau_j^*)\Big|\mathcal{F}_{\tau_{i+1}^*+\delta}\Big]\Big|\mathcal{F}_{\tau_i^*+\delta}\Big) \\
&= E\Big(Y(\tau_{i+1}^*)\Big|\mathcal{F}_{\tau_i^*+\delta}\Big) + E\Big(Z_{n-i-1}(\tau_{i+1}^*+\delta)\Big|\mathcal{F}_{\tau_i^*+\delta}\Big) \\
&= E\Big(Y(\tau_{i+1}^*) \ + \ E\Big[Z_{n-i-1}(\tau_{i+1}^*+\delta)\Big|\mathcal{F}_{\tau_{i+1}^*}\Big]\Big|\mathcal{F}_{\tau_i^*+\delta}\Big) \\
&= E\Big(Y(\tau_{i+1}^*) \ + \ \overline{Z}_{n-i-1}^r(\tau_{i+1}^*)\Big|\mathcal{F}_{\tau_i^*+\delta}\Big) \\
&= E\Big(Y_{n-i}(\tau_{i+1}^*)\Big|\mathcal{F}_{\tau_i^*+\delta}\Big).
\end{aligned}$$

"$\Leftarrow$": (Durch Induktion über n.)

I.A.: Der Induktionsanfang resultiert unmittelbar aus der Gleichung $Y = Y_1$.

I.S.: Es gelte die Implikation für $n-1$. Weiter gelten die Bedingungen (2.3) und (2.4). Wendet man die I.V. auf die Stoppzeit $\tau_1^* + \delta$ anstelle von σ an, so erhält man zusammen mit (2.4) die Optimalität von $(\tau_2^*, ..., \tau_n^*)$ für das Optimierungsproblem $Z_{n-1}(\tau_1^* + \delta)$, d.h.

$$Z_{n-1}(\tau_1^* + \delta) = E\Big(\sum_{j=2}^{n} Y(\tau_j^*)\Big|\mathcal{F}_{\tau_1^*+\delta}\Big).$$

Also gilt nach (2.3) und Satz 1.10.(i)

$$\begin{aligned} Z_n(\sigma) &= E\Big(Y_n(\tau_1^*)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \\ &= E\Big(Y(\tau_1^*) \ + \ E\Big[Z_{n-1}(\tau_1^* + \delta)\Big|\mathcal{F}_{\tau_1^*}\Big]\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \\ &= E\Big(Y(\tau_1^*) \ + \ Z_{n-1}(\tau_1^* + \delta)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \\ &= E\Big(Y(\tau_1^*) \ + \ E\Big[\sum_{j=2}^{n} Y(\tau_j^*)\Big|\mathcal{F}_{\tau_1^*+\delta}\Big]\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \\ &= E\Big(\sum_{i=1}^{n} Y(\tau_i^*)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big). \end{aligned} \qquad \square$$

Sei nun zusätzlich Bedingung (1.14) vorausgesetzt. Um Satz 2.2 auf den Fall "$n = +\infty$" zu übertragen, wird zunächst Lemma 2.1 für unendlich viele Ausübungsrechte formuliert:

Lemma 2.3. *(i) Für alle $\tau \in \mathcal{S}_\sigma^\infty$ gilt*

$$Y(\tau_m) \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \mathcal{P}\text{-fast sicher und in } \mathcal{L}^1 \tag{2.5}$$

und

$$Y_\infty(\tau_m) \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \mathcal{P}\text{-fast sicher und in } \mathcal{L}^1. \tag{2.6}$$

(ii) Ist $\tau^* \in \mathcal{S}_\sigma^\infty$ optimal für das Optimierungsproblem (1.13), d.h.

$$Z_\infty(\sigma) = E\Big(\sum_{i=1}^{\infty} Y(\tau_i^*)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big),$$

so ist

$$Z_\infty(\tau_i^* + \delta) = E\Big(\sum_{j=i+1}^{\infty} Y(\tau_j^*)\Big|\mathcal{F}_{\tau_i^*+\delta}\Big) \tag{2.7}$$

für alle $i \in \mathbb{N}$.

Beweis. Zu (2.5): Die Zufallsvariable $X := \sum_{i=1}^\infty Y(\tau_i) \in \overline{\mathbb{R}}^\Omega$ ist monotoner Limes der Folge $\left(\sum_{i=1}^N Y(\tau_i)\right)_{N\in\mathbb{N}}$, also nach der monotonen Konvergenz und (1.14) integrierbar. Also ist $\sum_{i=1}^\infty Y(\tau_i)$ $\mathcal{P}$-fast sicher endlich, woraus der erste Teil von (2.5) resultiert. Der zweite Teil folgt aus

$$\sum_{i=1}^{\infty} EY(\tau_i) = EX \leq c < \infty.$$

Zu (2.6): Es gilt nach (2.5) und Lemma 1.20.(iii)

$$Y_\infty(\tau_m) = Y(\tau_m) \;+\; \overline{Z}^r_\infty(\tau_m) \overset{\tau_m \geq (m-1)\delta}{\longrightarrow} 0 \quad \mathcal{P}\text{-fast sicher für } m \to \infty.$$

Daraus resultiert die $\mathcal{L}^1$-Konvergenz zusammen mit Folgerung 1.22.(ii) und (2.5).

Zu (ii): Wird im Beweis vom Lemma 2.1 "n" durch "$+\infty$" ersetzt, so kann man den Beweis wörtlich auf das Lemma 2.3.(ii) übertragen. □

Satz 2.4. *Eine Familie von Stoppzeiten $\tau^* \in \mathcal{S}^\infty_\sigma$ ist für das Optimierungsproblem (1.13) genau dann optimal, wenn die Bedingungen*

$$\tau^*_1 \text{ ist optimal für das Optimierungsproblem (1.29), d.h. } Z_\infty(\sigma) = E(Y_\infty(\tau^*_1)|\mathcal{F}_\sigma) \quad (2.8)$$

und

$$Z_\infty(\tau^*_i + \delta) = E\Big(Y_\infty(\tau^*_{i+1})\Big|\mathcal{F}_{\tau^*_i+\delta}\Big) \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N} \quad (2.9)$$

erfüllt sind.

Beweis. "$\Rightarrow$": Es sei $\tau^* \in \mathcal{S}^\infty_\sigma$ optimal für das Optimierungsproblem (1.13). Nach Lemma 2.3 und Folgerung 1.22.(i) gilt

$$\begin{aligned}
Z_\infty(\sigma) &= E\Big(\sum_{i=1}^\infty Y(\tau^*_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \\
&= E\Big(Y(\tau^*_1)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) + E\Big(E\Big[\sum_{i=2}^\infty Y(\tau^*_i)\Big|\mathcal{F}_{\tau^*_1+\delta}\Big]\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \\
&= E\Big(Y(\tau^*_1)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) + E\Big(Z_\infty(\tau^*_1+\delta)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \\
&= E\Big(Y(\tau^*_1) \;+\; E\Big[Z_\infty(\tau^*_1+\delta)\Big|\mathcal{F}_{\tau^*_1}\Big]\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \\
&= E\Big(Y_\infty(\tau^*_1)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big)
\end{aligned}$$

und analog für alle $i \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
Z_\infty(\tau^*_i+\delta) &= E\Big(\sum_{j=i+1}^\infty Y(\tau^*_j)\Big|\mathcal{F}_{\tau^*_i+\delta}\Big) \\
&= E\Big(Y(\tau^*_{i+1})\Big|\mathcal{F}_{\tau^*_i+\delta}\Big) + E\Big(E\Big[\sum_{j=i+2}^\infty Y(\tau^*_j)\Big|\mathcal{F}_{\tau^*_{i+1}+\delta}\Big]\Big|\mathcal{F}_{\tau^*_i+\delta}\Big) \\
&= E\Big(Y(\tau^*_{i+1})\Big|\mathcal{F}_{\tau^*_i+\delta}\Big) + E\Big(Z_\infty(\tau^*_{i+1}+\delta)\Big|\mathcal{F}_{\tau^*_i+\delta}\Big) \\
&= E\Big(Y(\tau^*_{i+1}) \;+\; E\Big[Z_\infty(\tau^*_{i+1}+\delta)\Big|\mathcal{F}_{\tau^*_{i+1}}\Big]\Big|\mathcal{F}_{\tau^*_i+\delta}\Big) \\
&= E\Big(Y_\infty(\tau^*_{i+1})\Big|\mathcal{F}_{\tau^*_i+\delta}\Big).
\end{aligned}$$

"$\Leftarrow$": Es gelten die Bedingungen (2.8) und (2.9). Mit Folgerung 1.22.(i) erhält man

$$\begin{aligned}
Z_\infty(\sigma) &= E\Big(Y_\infty(\tau_1^*)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \\
&= E\Big(Y(\tau_1^*) + E(Z_\infty(\tau_1^* + \delta)|\mathcal{F}_{\tau_1^*})\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \\
&= E\Big(Y(\tau_1^*) + Z_\infty(\tau_1^* + \delta)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \\
&= E\Big(Y(\tau_1^*)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) + E\Big(Y_\infty(\tau_2^*)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big)
\end{aligned}$$

und induktiv für alle $m \in \mathbb{N}$

$$Z_\infty(\sigma) = E\Big(\sum_{i=1}^m Y(\tau_i^*)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) + E\Big(Y_\infty(\tau_{m+1}^*)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big). \tag{2.10}$$

Daraus folgt zusammen mit (2.6)

$$\begin{aligned}
Z_\infty(\sigma) &= \lim_{m\to\infty}\Big[E\Big(\sum_{i=1}^m Y(\tau_i^*)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) + E\Big(Y_\infty(\tau_{m+1}^*)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big)\Big] \\
&\leq \limsup_{m\to\infty} E\Big(\sum_{i=1}^m Y(\tau_i^*)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) + \limsup_{m\to\infty} E\Big(Y_\infty(\tau_{m+1}^*)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \\
&\leq E\Big(\sum_{i=1}^\infty Y(\tau_i^*)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) + E\Big(\limsup_{m\to\infty} Y_\infty(\tau_{m+1}^*)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \\
&= E\Big(\sum_{i=1}^\infty Y(\tau_i^*)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big).
\end{aligned}$$

□

Mit Satz 2.2 erhält man

Satz 2.5. *Es sei für alle $k \in \mathbb{N}$ $\tau^{*,k}$ eine optimale Familie von Stoppzeiten für das Optimierungsproblem $Z_k(\sigma)$. Ist $(\tau_1^{*,k})_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend, so gilt für $\tau_1^{*,\infty} := \lim_{k\to\infty} \tau_1^{*,k}$*

$$Z_\infty(\sigma) = E(Y_\infty(\tau_1^{*,\infty})|\mathcal{F}_\sigma). \tag{2.11}$$

Beweis. Sei $(\tau_1^{*,k})_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend. $\tau_1^{*,\infty} = \lim_{k\to\infty} \downarrow \tau_1^{*,k}$ ist eine Stoppzeit, da die zugrundeliegende Filtration rechtsseitig-stetig ist. Weiter gilt nach (1.17), Satz 2.2 und Folgerung 1.22.(iii)

$$\begin{aligned}
Z_\infty(\sigma) = \lim_{k\to\infty} Z_k(\sigma) = \lim_{k\to\infty} E(Y_k(\tau_1^{*,k})|\mathcal{F}_\sigma) \leq \\
\leq \lim_{k\to\infty} E(Y_\infty(\tau_1^{*,k})|\mathcal{F}_\sigma) = E(Y_\infty(\tau_1^{*,\infty})|\mathcal{F}_\sigma).
\end{aligned}$$

□

2.2 Der Markov-Fall

Für den Rest dieses Kapitels sei $(X(t), \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ ein starker Markovprozess mit Zustandsraum E und eine feste Zinsrate $\beta \in \mathbb{R}_{>0}$ vorgegeben. Weiter sei $h : E \to [0, \infty)$ eine messbare Abbildung so, dass der $\mathfrak{F}$-adaptierte und nicht-negative Auszahlungsprozess

$$Y = \Big(e^{-\beta t} h(X(t)) \Big)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \tag{2.12}$$

rechtsseitig-stetig, d.h. $\mathcal{P}_x$-fast sicher rechtsseitig-stetig für alle $x \in E$, ist und für alle $x \in E$ die Bedingung

$$E_x\Big(\sup_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}} Y(t) \Big) < \infty \tag{2.13}$$

erfüllt.

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse aus dem ersten Kapitel auf die Markovsche Stoppsituation übertragen. Dazu benötigt man die folgende

Definition 2.6. Für alle $x \in E$ und $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ seien

(i) $Z_n(\sigma, x) := \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_\sigma^n} E_x\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i) \Big| \mathcal{F}_\sigma \Big)$ für alle $\sigma \in \mathcal{S}$,

(ii) $V_n(x) := Z_n(0, x)$,

(iii) $\overline{Z}_n(t, x) := E_x(Z_n(t + \delta, x) | \mathcal{F}_t)$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$,

(iv) $\overline{Z}_n^r(\cdot, x)$ die in Satz 1.10 bzw. Lemma 1.20 eingeführte rechtsseitig-stetige Modifikation von $\overline{Z}_n(\cdot, x)$ und

(v) $Y_{n+1}(\cdot, x) := Y + \overline{Z}_n^r(\cdot, x)$.

R. Carmona und S. Dayanik [6, Chapter 4] haben gezeigt, dass eine nicht-negative und C_0-*stetige* Abbildung $h_n : E \to [0, \infty)$ mit

$$V_n(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{S}} E_x\Big(e^{-\beta \tau} h_n(X(\tau)) \Big) \quad \text{für alle } x \in X \tag{2.14}$$

existiert. Weiter wurde gezeigt, dass h_n die Summe aus h und einer C_0-stetigen und β-*exzessiven* Abbildung ist, im Sinne der

Definition 2.7. Eine messbare Abbildung $f : E \to (-\infty, +\infty]$ nennt man

(i) β-*exzessiv*, wenn für alle $x \in E$ die folgenden Eigenschaften erfüllt sind.

(a) $f(x) \geq E_x\Big(e^{-\beta t} f(X(t)) \Big)$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

(b) $f(x) = \lim_{t \downarrow 0} E_x\Big(e^{-\beta t} f(X(t)) \Big)$.

(ii) C_0-*stetig*, wenn

$$\lim_{t \downarrow 0} f(X(t)) = f(X(0)) \quad \mathcal{P}_x\text{-fast sicher für alle } x \in E.$$

Um (2.14) auch für unendlich viele Ausübungsrechte zu beweisen, werden in 2.8 und 2.9 kurz die Ergebnisse von R. Carmona und S. Dayanik zusammengefasst:

Definition und Lemma 2.8. *Es wird für alle $n \in \mathbb{N}$ durch*

$$g_n(x) := E_x\Big(e^{-\beta\delta} V_n(X(\delta))\Big) \tag{2.15}$$

eine messbare Abbildung g_n von E nach $\mathbb{R}_{\geq 0}$ mit den folgenden Eigenschaften definiert:

(i) g_n ist β-exzessiv und C_0-stetig.

(ii) Der Prozess $\Big(e^{-\beta t} g_n(X(t))\Big)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ ist rechtsseitig-stetig.

(iii) Für alle $x \in E$ und $\tau \in \mathcal{S}$ gilt

$$e^{-\beta\tau} g_n(X(\tau)) = \overline{Z}_n^{\tau}(\tau, x) \quad \mathcal{P}_x\text{-fast sicher.} \tag{2.16}$$

Satz 2.9. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist*

$$h_{n+1} := h + g_n$$

eine nicht-negative und C_0-stetige Abbildung mit

$$Z_{n+1}(\sigma, x) = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_\sigma} E_x\Big(e^{-\beta\tau} h_{n+1}(X(\tau)) \Big| \mathcal{F}_\sigma\Big) \quad \mathcal{P}_x\text{-fast sicher,} \tag{2.17}$$

also insbesondere

$$e^{-\beta\sigma} V_{n+1}(X(\sigma)) = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_\sigma} E_x\Big(e^{-\beta\tau} h_{n+1}(X(\tau)) \Big| \mathcal{F}_\sigma\Big) \quad \mathcal{P}_x\text{-fast sicher} \tag{2.18}$$

für alle $x \in E$ und $\sigma \in \mathcal{S}$.

Für den Existenzbeweis einer C_0-stetigen Abbildung h_∞ mit

$$V_\infty(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{S}} E_x\Big(e^{-\beta\tau} h_\infty(X(\tau))\Big) \quad \text{für alle } x \in X$$

werden die beiden folgenden bekannten Resultate aus der klassischen Theorie des optimalen Stoppens verwendet, siehe A. Shiryayev [31, Page 116] und E. B. Dynkin [13].

Satz 2.10. *Jede nicht-negative und β-exzessive Funktion ist C_0-stetig.*

Satz 2.11. *Sei $g : E \to [0, +\infty)$ messbar und C_0-stetig. Es wird durch*

$$V(x) := \sup_{\tau \in \mathcal{S}} E_x\Big(e^{-\beta\tau} g(X(\tau))\Big)$$

eine β-exzessive Majorante V von g mit der folgenden Eigenschaft definiert:

$$e^{-\beta\sigma} V(X(\sigma)) = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_\sigma} E_x\Big(e^{-\beta\tau} g(X(\tau)) \Big| \mathcal{F}_\sigma\Big) \ \mathcal{P}_x\text{-fast sicher} \quad \text{für alle } \sigma \in \mathcal{S}.$$

Ist V zusätzlich endlich, so ist der Prozess $\Big(e^{-\beta t} V(X(t))\Big)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ das minimal dominierende rechtsseitig-stetige Supermartingal von $\Big(e^{-\beta t} g(X(t))\Big)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$.

Um Satz 2.9 auf Z_∞ zu übertragen, sei zusätzlich vorausgesetzt, dass für alle $x \in E$ der Erwartungswert

$$E_x\Big(\sup_{t\in C}\sum_{i=1}^{\infty} Y(t_i)\Big)$$

endlich ist. Als Vorbereitung dient

Lemma 2.12. *Für alle $x \in E$ gilt:*

(i) $e^{-\beta\tau}V_\infty(X(\tau)) = Z_\infty(\tau, x)$ *$\mathcal{P}_x$-fast sicher für alle $\tau \in \mathcal{S}$.*

(ii) $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}\, \forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0} : E_x\Big(V_\infty(X(t)) - V_n(X(t))\Big) < e^{\beta t}\epsilon.$

Beweis. Es gilt nach (1.18), Satz 2.9 und (1.17) für alle $\tau \in \mathcal{S}$ und $x \in E$

$$e^{-\beta\tau}V_\infty(X(\tau)) = e^{-\beta\tau}\lim_{n\to\infty} V_n(X(\tau)) = \lim_{n\to\infty} Z_n(\tau, x) = Z_\infty(\tau, x) \quad \mathcal{P}_x\text{-fast sicher.}$$

Daraus erhält man für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$E_x\Big(V_\infty(X(t)) - V_n(X(t))\Big) = e^{\beta t}\, E_x\Big(Z_\infty(t, x) - Z_n(t, x)\Big),$$

woraus zusammen mit Lemma 1.17.(ii) die zweite Aussage resultiert. □

Definition und Lemma 2.13. *Es wird durch*

$$g_\infty(x) := E_x\Big(e^{-\beta\delta}V_\infty(X(\delta))\Big) \tag{2.19}$$

eine messbare Abbildung g_∞ von E nach $\mathbb{R}_{\geq 0}$ mit den folgenden Eigenschaften definiert:

(i) $\lim_{n\to\infty} \uparrow g_n(x) = g_\infty(x)$ *für alle $x \in E$.*

(ii) $e^{-\beta\tau}g_\infty(X(\tau)) = \overline{Z}^r_\infty(\tau, x)$ *$\mathcal{P}_x$-fast sicher für alle $\tau \in \mathcal{S}$.*

(iii) *g_∞ ist β-exzessiv und C_0-stetig.*

Beweis. <u>Zu (i):</u> Es gilt nach Satz 1.16.(i) für alle $x \in E$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \uparrow g_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \uparrow E_x\Big(e^{-\beta\delta}V_n(X(\delta))\Big)\\
&= E_x\Big(e^{-\beta\delta}\lim_{n\to\infty} \uparrow V_n(X(\delta))\Big)\\
&= E_x\Big(e^{-\beta\delta}V_\infty(X(\delta))\Big)\\
&= g_\infty(x).
\end{aligned}$$

Zu (ii): Aus der ersten Aussage erhält man zusammen mit Lemma 2.8.(iii), Satz 1.10.(i) und Folgerung 1.22.(i)

$$\begin{aligned} e^{-\beta\tau} g_\infty(X(\tau)) &= e^{-\beta\tau} \lim_{n\to\infty} \uparrow g_n(X(\tau)) \\ &= \lim_{n\to\infty} \uparrow \overline{Z}^r_n(\tau, x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \uparrow E\Big(Z_n(\tau+\delta, x)\Big|\mathcal{F}_\tau\Big) \\ &= \overline{Z}^r_\infty(\tau, x) \end{aligned}$$

$\mathcal{P}_x$-fast sicher für alle $\tau \in \mathcal{S}$.

Zu (iii): Nach (i) und der β-Exzessivität von g_n gilt für alle $x \in E$ und $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$g_\infty(x) = \lim_{n\to\infty} \uparrow g_n(x) \geq \lim_{n\to\infty} E_x\Big(e^{-\beta t} g_n(X(t))\Big) = E_x\Big(e^{-\beta t} g_\infty(X(t))\Big).$$

Sei nun $x \in E$, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_{>0})^{\mathbb{N}}$ mit $t_n \downarrow 0$ für $n \to \infty$ und $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Es existiert nach (i) und Lemma 2.12.(ii) $m \in \mathbb{N}$ mit

$$g_\infty(x) - g_m(x) < \epsilon/3 \quad \text{und} \quad E_x\Big(V_\infty(X(t)) - V_m(X(t))\Big) < e^{\beta t}\frac{\epsilon}{3e^{\beta t_1}}$$

für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Da g_m β-exzessiv ist, existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\Big|g_m(x) - E_x\Big(e^{-\beta t_n} g_m(X(t_n))\Big)\Big| < \epsilon/3$$

für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$. Also gilt für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$

$$\begin{aligned} &\Big|g_\infty(x) - E_x\Big(e^{-\beta t_n} g_\infty(X(t_n))\Big)\Big| \\ \leq\ & \Big|g_\infty(x) - g_m(x)\Big| + \Big|g_m(x) - E_x\Big(e^{-\beta t_n} g_m(X(t_n))\Big)\Big| + \\ & + \Big|E_x\Big(e^{-\beta t_n} g_m(X(t_n))\Big) - E_x\Big(e^{-\beta t_n} g_\infty(X(t_n))\Big)\Big| \\ <\ & \epsilon/3 + \epsilon/3 + \Big|E_x\Big(g_m(X(t_n)) - g_\infty(X(t_n))\Big)\Big| \\ =\ & \epsilon/3 + \epsilon/3 + \Big|E_x\Big(e^{-\beta\delta}\Big[V_\infty(X(t_n+\delta)) - V_m(X(t_n+\delta))\Big]\Big)\Big| \\ <\ & \epsilon/3 + \epsilon/3 + e^{\beta t_n}\frac{\epsilon}{3e^{\beta t_1}} \\ \leq\ & \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 \\ =\ & \epsilon. \end{aligned}$$

Also ist g_∞ β-exzessiv und somit nach Satz 2.10 ebenfalls C_0-stetig. □

Aus der β-Exzessivität von g_∞ resultiert zusammen mit A. Shiryaev [31, Page 116]

Folgerung 2.14. *Der Prozess* $\Big(e^{-\beta t} g_\infty(X(t)\Big)_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ *ist rechtsseitig-stetig. Insbesondere ist für alle* $x \in E$ *der Prozess* $\Big(e^{-\beta t}(h + g_\infty)(X(t))\Big)_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ *eine Version von* $Y_\infty(\cdot, x)$ *bzgl. des Wahrscheinlichkeitsmaßes* $\mathcal{P}_x$. □

Mit diesen Hilfssätzen erhält man entsprechend zum Satz 2.9 für unendlich viele Ausübungsmöglichkeiten

Satz 2.15. *Es wird durch*

$$h_\infty := h + g_\infty$$

eine nicht-negative und C_0-stetige Abbildung mit

$$Z_\infty(\sigma, x) = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_\sigma} E_x\Big(e^{-\beta\tau} h_\infty(X(\tau)) \Big| \mathcal{F}_\sigma\Big) \quad \mathcal{P}_x\text{-fast sicher}, \tag{2.20}$$

also insbesondere

$$e^{-\beta\sigma} V_\infty(X(\sigma)) = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_\sigma} E_x\Big(e^{-\beta\tau} h_\infty(X(\tau)) \Big| \mathcal{F}_\sigma\Big) \quad \mathcal{P}_x\text{-fast sicher} \tag{2.21}$$

für alle $x \in E$ und $\sigma \in \mathcal{S}$.

Beweis. Die Eigenschaft (2.20) resultiert unmittelbar aus Folgerung 2.14 und (1.29). Daraus erhält man (2.21) zusammen mit Satz 2.11. □

2.3 Optimale Stoppzeiten im Markov-Fall

Sei $h_1 := h$. Definiere für alle $n \in \mathbb{N}$ das Stoppgebiet

$$\Gamma_n := \{x \in E;\ V_n(x) = h_n(x)\} \tag{2.22}$$

und die Ersteintrittszeit in Γ_n mit

$$\sigma_n := \inf\{t \in \mathbb{R}_{\geq 0};\ X(t) \in \Gamma_n\}. \tag{2.23}$$

Es wird zunächst gezeigt, dass die Folge der in (2.22) definierten Stoppgebiete aufsteigend ist. In einem Black-Scholes-Modell wurde diese Aussage bereits von R. Carmona und N. Touzi [7, Lemma 3.4] für den Auszahlungsprozess eines amerikanischen Puts bewiesen. In diesem Fall ist für alle $n \in \mathbb{N}$ das Stoppgebiet Γ_n ein durch den Ausübungspreis beschränktes Teilintervall von $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Da R. Carmona und N. Touzi diese Eigenschaft von Γ_n benutzen, um die Inklusionen $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq ...$ zu zeigen, kann deren Beweisidee nicht auf die in (2.22) definierten Stoppgebiete übertragen werden.

Um zu beweisen, dass die Folge $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aufsteigend ist, benötigt man das folgende

Lemma 2.16. *Es gilt für alle $x \in E$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$*

$$Z_{n+1}(0, x) - Z_n(0, x) \leq E_x\Big(Z_n(\delta, x) - Z_{n-1}(\delta, x)\Big). \tag{2.24}$$

Beweis. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Es existieren $\tau \in \mathcal{S}_0^{n+1}$ und $\rho \in \mathcal{S}_\delta^{n-1}$ mit

$$Z_{n+1}(0,x) \leq E_x\Big(\sum_{i=1}^{n+1} Y(\tau_i)\Big) + \epsilon/2 \quad \text{und} \quad E_x\Big(Z_{n-1}(\delta,x)\Big) \leq E_x\Big(\sum_{i=1}^{n-1} Y(\rho_i)\Big) + \epsilon/2.$$

Definiere für alle $i \in \mathbb{N}_{<n}$ die Stoppzeiten $\mu_i := \min\{\tau_{i+1}, \rho_i\}$ und $\nu_i := \max\{\tau_{i+1}, \rho_i\}$. Dann ist die Familie $(\tau_1, \nu_1, ..., \nu_{n-1})$ in $\mathcal{S}_0^n$ und $(\mu_1, ..., \mu_{n-1}, \tau_{n+1})$ in $\mathcal{S}_\delta^n$ enthalten, woraus die Ungleichung

$$\begin{aligned}
& Z_{n+1}(0,x) + E_x\Big(Z_{n-1}(\delta,x)\Big) \\
\leq\ & E_x\Big(\sum_{i=1}^{n+1} Y(\tau_i)\Big) + E_x\Big(\sum_{i=1}^{n-1} Y(\rho_i)\Big) + \epsilon \\
=\ & E_x\Big(Y(\tau_1) + \sum_{i=1}^{n-1}\Big[Y(\tau_{i+1}) + Y(\rho_i)\Big] + Y(\tau_{n+1})\Big) + \epsilon \\
=\ & E_x\Big(Y(\tau_1) + \sum_{i=1}^{n-1}\Big[Y(\max\{\tau_{i+1}, \rho_i\}) + Y(\min\{\tau_{i+1}, \rho_i\})\Big] + Y(\tau_{n+1})\Big) + \epsilon \\
=\ & E_x\Big(Y(\tau_1) + \sum_{i=1}^{n-1} Y(\nu_i)\Big) + E_x\Big(\sum_{i=1}^{n-1} Y(\mu_i) + Y(\tau_{n+1})\Big) + \epsilon \\
\leq\ & Z_n(0,x) + E_x\Big(Z_n(\delta,x)\Big) + \epsilon
\end{aligned}$$

resultiert. □

Satz 2.17. *Es wird durch*

$$f_n := V_n - h_n$$

eine monoton fallende Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *definiert. Insbesondere ist* $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *aufsteigend.*

Beweis. Es sei $g_0 :\equiv V_0 :\equiv 0$. Mit Lemma 2.16 erhält man für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in E$

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(x) - f_n(x) &= V_{n+1}(x) - h_{n+1}(x) - V_n(x) + h_n(x) \\
&= V_{n+1}(x) - h(x) - g_n(x) - V_n(x) + h(x) + g_{n-1}(x) \\
&= V_{n+1}(x) - V_n(x) - g_n(x) + g_{n-1}(x) \\
&= V_{n+1}(x) - V_n(x) - E_x\Big(e^{-\beta\delta} V_n(X(\delta))\Big) + E_x\Big(e^{-\beta\delta} V_{n-1}(X(\delta))\Big) \\
&= V_{n+1}(x) - V_n(x) - E_x\Big(Z_n(\delta,x)\Big) + E_x\Big(Z_{n-1}(\delta,x)\Big) \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

und somit

$$\Gamma_n = f_n^{-1}(\{0\}) \subseteq f_{n+1}^{-1}(\{0\}) = \Gamma_{n+1}.$$

□

Unter der Bedingung (2.34) definiere

$$\Gamma_\infty := \{x \in E;\ V_\infty(x) = h_\infty(x)\} \tag{2.25}$$

und die Ersteintrittszeit in Γ_∞ mit

$$\sigma_\infty := \inf\{t \in \mathbb{R}_{\geq 0};\ X(t) \in \Gamma_\infty\}. \tag{2.26}$$

Satz 2.18. *Ist die Bedingung (2.34) erfüllt, so gilt:*

(i) Die aufsteigende Folge von Mengen $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist durch Γ_∞ nach oben beschränkt.

(ii) Ist σ_n für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in E$ eine optimale Stoppzeit für das Optimierungsproblem (2.18), so sind für alle $x \in E$ die Stoppzeiten σ_∞ und $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$ optimal für das Optimierungsproblem (2.21) mit $\sigma_\infty \leq \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$ $\mathcal{P}_x$-fast sicher.

Beweis. Zu (i): Es gilt nach (1.17) und Lemma 2.13.(i) für alle $x \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n$

$$V_\infty(x) = \lim_{n\to\infty} V_n(x) = \lim_{n\to\infty} h_n(x) = h + \lim_{n\to\infty} g_n(x) = h + g_\infty(x) = h_\infty(x).$$

Zu (ii): Nach Satz 2.17 ist die Folge $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend. Ist nun σ_n für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in E$ eine optimale Stoppzeit für das Optimierungsproblem (2.18), so resultiert die Optimalität von $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$ aus Satz 2.5. Existiert eine optimale Stoppzeit für das Optimierungsproblem (2.18), so ist nach A. Shiryayev [31, Chapter 3, Theorem 3] σ_∞ $\mathcal{P}_x$-fast sicher die kleinste optimale Stoppzeit für alle $x \in E$. □

Im folgenden deterministischen Beispiel konvergiert die Folge von Stoppzeiten $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht punktweise gegen σ_∞.

Beispiel 2.19. Es sei $(b_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine summierbare Folge mit Werten in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ und $b_m > 2b_{m+1}$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Für den Auszahlungsprozess

$$Y(t) \equiv \begin{cases} b_1 - b_2, & \text{falls } \lfloor t \rfloor = 0, \\ 2b_{\frac{\lfloor t \rfloor}{2}+1} - b_{\frac{\lfloor t \rfloor}{2}+2}, & \text{falls } \lfloor t \rfloor \in 2\mathbb{N}, \\ b_{\frac{\lfloor t \rfloor + 1}{2}}, & \text{falls } \lfloor t \rfloor \in 2\mathbb{N} - 1, \end{cases}$$

und der refracting time $\delta = 2$ ist

(i) für alle $n \in \mathbb{N}$ $\tau^{*,n} := (1, 3, ..., 2n-1)$ eine optimale Familie von Stoppzeiten für das Optimierungsproblem $Z_n(0)$ und es gilt für jede weitere optimale Familie $\rho^* \in \mathcal{S}_0^n$

$$\tau_i^{*,n} \leq \rho_i^* \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}_{\leq n}. \tag{2.27}$$

(ii) $\tau^{*,\infty} := (0, 2, 4, ...)$ eine optimale Folge von Stoppzeiten für das Optimierungsproblem $Z_\infty(0)$ und es gilt für jede weitere Folge von Stoppzeiten $\rho \in \mathcal{S}_0^\infty$

$$\tau_i^{*,\infty} \leq \rho_i \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}. \tag{2.28}$$

Beweis. Für die Folge $(c_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ mit $Y(m) \equiv c(m)$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$c_{2m-1} = b_m > 2b_{m+1} > 2b_{m+1} - b_{m+2} = c_{2m} \quad \text{und} \quad c_{2m} = 2b_{m+1} - b_{m+2} > b_{m+1} = c_{2m+1}$$

für alle $m \in \mathbb{N}$. Also ist $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ streng monoton fallend und $c_0 = b_1 - b_2 < b_1 = c_1$. Somit sind für alle $n \in \mathbb{N}$ $\tau^{*,n}$ und $\rho^n := (0, 2, ..., 2n-2)$ die einzigen möglichen optimalen Familien von Stoppzeiten für das Optimierungsproblem $Z_n(0)$ mit der Eigenschaft (2.27). Daraus resultiert die erste Aussage zusammen mit

$$\sum_{i=1}^{n} Y(\rho_i^n) \equiv b_1 - b_2 + \sum_{i=1}^{n-1} 2b_{i+1} - b_{i+2} = \sum_{i=1}^{n} b_i - b_{n+1} < \sum_{i=1}^{n} b_i \equiv \sum_{i=1}^{n} Y(\tau_i^{*,n}).$$

Weiter gilt nach (1.17) und (i)

$$\begin{aligned} Z_\infty(0) &= \lim_{n\to\infty} Z_n(0) \equiv \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} Y(\tau_i^{*,n}) \equiv \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} b_i \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} b_i - b_{n+1} \equiv \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} Y(\rho_i^n) = \sum_{i=1}^{\infty} Y(\tau_i^{*,\infty}). \end{aligned} \qquad \square$$

Insbesondere ist die von R. Carmona und N. Touzi [7, Proposition 4.4] für den Auszahlungsprozess eines amerikanischen Puts bewiesene Eigenschaft

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n} = \Gamma_\infty$$

in diesem Beispiel nicht gültig.

Für $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$ erhält man die folgende Charakterisierung:

Satz 2.20. $\rho := \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$ *ist die Ersteintrittszeit in* $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n$, *d.h.*

$$\rho = \inf\{t \in \mathbb{R}_{\geq 0};\ X(t) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n\}. \tag{2.29}$$

Beweis. Es gilt

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{t \in \mathbb{R}_{\geq 0};\ X(t) \in \Gamma_n\} \geq \inf\{t \in \mathbb{R}_{\geq 0};\ X(t) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n\}$$

und

$$\inf\{t \in \mathbb{R}_{\geq 0};\ X(t) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n\} \geq \inf_{n\in\mathbb{N}} \Big\{ \inf\{t \in \mathbb{R}_{\geq 0};\ X(t) \in \Gamma_n\} \Big\} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n = \rho. \qquad \square$$

Es sei für den Rest dieses Abschnittes der Zustandsraum E ein polnischer Raum und X der Prozess in kanonischer Darstellung, d.h. Ω ist die Menge der Abbildungen

$$\begin{aligned} & D_E(\mathbb{R}_{\geq 0}) \\ = \; & \{f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to E;\ f \text{ ist rechtsseitig-stetig und linksseitige Grenzwerte existieren}\}, \end{aligned}$$

$(X(t))_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} = (\pi_t)_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$, wobei $\pi_t : D_E(\mathbb{R}_{\geq 0}) \to E,\ f \mapsto f(t)$, und $\mathfrak{F}$ die von X erzeugte rechtsseitig-stetige Filtration. Definiere für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ den *shift Operator*

$$\theta_t : \Omega \longrightarrow \Omega, \quad (x_s)_{s\in\mathbb{R}_{\geq 0}} \mapsto (x_{s+t})_{s\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$$

und für jede Stoppzeit τ

$$\theta_\tau : \Omega \longrightarrow \Omega, \quad \omega \mapsto \theta_{\tau(\omega)}(\omega).$$

Aus der starken Markov-Eigenschaft erhält man für alle $x \in E$, jede Stoppzeit τ und jede nicht-negative $\mathfrak{F}$-messbare Abbildung H

$$E_x(H \circ \theta_\tau | \mathcal{F}_\tau) = E_{X(\tau)} H, \tag{2.30}$$

siehe B. Øksendal [25, Page 119]. Es sei weiter vorausgesetzt, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in E$ die Stoppzeit σ_n optimal für das Stoppproblem

$$V_n(x) = \sup_{\tau\in\mathcal{S}} E_x\Big(e^{-\beta\tau} h_n(X(\tau))\Big) \tag{2.31}$$

ist, was unter sehr allgemeinen Bedingungen erfüllt ist, vgl. S. Dayanik und I. Karatzas [9] und A. Shiryayev [31, Chapter 3].

Im folgenden Satz wird mit Hilfe dieser optimalen Stoppzeiten eine optimale Familie von Stoppzeiten $(\tau_1^{(n)}, ..., \tau_n^{(n)})$ für das mehrfache Optimierungsproblem

$$V_n(x) = \sup_{\tau\in\mathcal{S}_0^n} E_x\Big(\sum_{i=1}^n e^{-\beta\tau_i}\ h(X(\tau_i))\Big) \tag{2.32}$$

konstruiert. Ist der Prozess X eine lineare Diffusion, so erhält man die Optimalität von $(\tau_1^{(n)}, ..., \tau_n^{(n)})$ nach R. Carmona und S. Dayanik [6, Proposition 5.4].

Satz 2.21. *Es sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Definiere für alle $i \in \{2, ..., n\}$ rekursiv*

$$\tau_1^{(n)} := \sigma_n \quad \textit{und} \quad \tau_i^{(n)} = \tau_{i-1}^{(n)} + \delta + \sigma_{n-i+1} \circ \theta_{\tau_{i-1}^{(n)}+\delta}. \tag{2.33}$$

Für alle $x \in E$ ist die Familie $(\tau_1^{(n)}, ..., \tau_n^{(n)})$ optimal für das Stoppproblem (2.32).

Beweis. Sei $x \in E$. Aufgrund der Definition von $\tau_1^{(n)}$ erfüllt die Familie von Stoppzeiten $(\tau_1^{(n)}, ..., \tau_n^{(n)})$ die Bedingung (2.3) bzgl. des mehrfachen Optimierungsproblems (2.32).

Weiter gilt für alle $i \in \mathbb{N}_{<n}$ mit der Bezeichnung $\rho := \tau_i^{(n)} + \delta$, (2.30), der Optimalität von σ_{n-i} für (2.31) und Satz 2.9

$$\begin{aligned}
& E_x\Big(e^{-\beta\tau_{i+1}^{(n)}}\ h_{n-i}\Big(X(\tau_{i+1}^{(n)})\Big)\Big|\mathcal{F}_{\tau_i^{(n)}+\delta}\Big) \\
=\ & e^{-\beta\rho}\ E_x\Big(e^{-\beta(\sigma_{n-i}\circ\theta_\rho)}\ h_{n-i}\Big(X(\rho+\sigma_{n-i}\circ\theta_\rho)\Big)\Big|\mathcal{F}_\rho\Big) \\
\overset{1)}{=}\ & e^{-\beta\rho}\ E_x\Big(e^{-\beta(\sigma_{n-i}\circ\theta_\rho)}\ h_{n-i}\Big(X(\sigma_{n-i})\circ\theta_\rho\Big)\Big|\mathcal{F}_\rho\Big) \\
=\ & e^{-\beta\rho}\ E_{X(\rho)}\Big(e^{-\beta\sigma_{n-i}}\ h_{n-i}(X(\sigma_{n-i}))\Big) \\
=\ & e^{-\beta\rho}\ V_{n-i}(X(\rho)) \\
=\ & Z_{n-i}(\rho, x).
\end{aligned}$$

Dabei wurde in 1) benutzt, dass für alle $\sigma, \tau \in \mathcal{S}$ die Gleichung $X(\sigma + \tau\circ\theta_\sigma) = X(\tau)\circ\theta_\sigma$ gilt. Also ist nach Satz 2.2 $(\tau_1^{(n)}, ..., \tau_n^{(n)})$ optimal für das n-fache Stoppproblem (2.32). □

Ist zusätzlich für alle $x \in E$ der Erwartungswert

$$E_x\Big(\sup_{t\in C}\sum_{i=1}^{\infty} Y(t_i)\Big) \tag{2.34}$$

endlich, so erhält man folgendermaßen eine Folge von optimalen Stoppzeiten für

$$V_\infty(x) = \sup_{\tau\in\mathcal{S}_0^\infty} E_x\Big(\sum_{i=1}^{\infty} e^{-\beta\tau_i}\ h(X(\tau_i))\Big): \tag{2.35}$$

Satz 2.22. *Definiere für alle für alle $i \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ rekursiv*

$$\tau_1^{(\infty)} := \sigma_\infty \quad \textit{und} \quad \tau_i^{(\infty)} = \tau_{i-1}^{(\infty)} + \delta + \sigma_\infty \circ \theta_{\tau_{i-1}^{(\infty)}+\delta}. \tag{2.36}$$

Für alle $x \in E$ ist $\Big(\tau_i^{(\infty)}\Big)_{i\in\mathbb{N}}$ eine optimale Folge von Stoppzeiten für (2.35).

Beweis. Sei $x \in E$. Aufgrund der Definition von $\tau_1^{(\infty)}$ und Satz 2.18.(ii) erfüllt die Folge von Stoppzeiten $(\tau_i^{(\infty)})_{i\in\mathbb{N}}$ die Bedingung (2.8) bzgl. des mehrfachen Optimierungsproblems (2.35). Weiter gilt für alle $i \in \mathbb{N}$ mit der Bezeichnung $\rho := \tau_i^{(\infty)} + \delta$, (2.30), der Optimalität von σ_∞ für (2.21), und Satz 2.15

$$\begin{aligned}
& E_x\Big(e^{-\beta\tau_{i+1}^{(\infty)}}\ h_\infty\Big(X(\tau_{i+1}^{(\infty)})\Big)\Big|\mathcal{F}_{\tau_i^{(\infty)}+\delta}\Big) \\
=\ & e^{-\beta\rho}\ E_x\Big(e^{-\beta(\sigma_\infty\circ\theta_\rho)}\ h_\infty\Big(X(\rho+\sigma_\infty\circ\theta_\rho)\Big)\Big|\mathcal{F}_\rho\Big) \\
=\ & e^{-\beta\rho}\ E_x\Big(e^{-\beta(\sigma_\infty\circ\theta_\rho)}\ h_\infty\Big(X(\sigma_\infty)\circ\theta_\rho\Big)\Big|\mathcal{F}_\rho\Big) \\
=\ & e^{-\beta\rho}\ E_{X(\rho)}\Big(e^{-\beta\sigma_\infty}\ h_\infty(X(\sigma_\infty))\Big) \\
=\ & e^{-\beta\rho}\ V_\infty(X(\rho)) \\
=\ & Z_\infty(\rho, x).
\end{aligned}$$

Also ist nach Satz 2.4 $(\tau_i^{(\infty)})_{i\in\mathbb{N}}$ optimal für das Stoppproblem (2.35). □

Kapitel 3

Mehrfaches optimales Stoppen mit endlichem Horizont

In diesem Kapitel wird das Problem des mehrfachen optimalen Stoppens in einem Modell mit endlichem Horizont $T \in \mathbb{R}_{>0}$ betrachtet, wobei T als der letzte im Modell berücksichtigte Ausübungszeitpunkt zu interpretieren sei. Dafür sei für die folgenden drei Abschnitte das folgende Modell gegeben:

Modell 3.1. Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathfrak{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ eine rechtsseitig-stetige Filtration so, dass $\mathcal{F}_0 = \{F \in \mathcal{F};\ \mathcal{P}(F) \in \{0,1\}\}$ und $\mathcal{S}^T$ die Menge der $\mathfrak{F}$-Stoppzeiten. Definiere für alle $\sigma \in \mathcal{S}^T$ und $R \in [0,T]$

$$\mathcal{S}^R := \{\tau \in \mathcal{S}^T;\ \tau \leq R\} \quad \text{und} \quad \mathcal{S}^R_\sigma := \{\tau \in \mathcal{S}^T;\ \sigma \leq \tau \leq R\}.$$

Der Auszahlungsprozess $Y = (Y(t))_{t\in[0,T]}$ sei weiter ein $\mathfrak{F}$-adaptierter, nicht-negativer und rechtsseitig-stetiger stochastischer Prozess mit der Eigenschaft

$$E\Big(\sup_{t\in[0,T]} Y(t)\Big) < \infty. \tag{3.1}$$

Außerdem seien die Anzahl der Ausübungsrechte $n \in \mathbb{N}_0$ und eine refracting time $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ fixiert.

Das klassische Problem des optimalen Stoppens mit endlichem Horizont T, welches unter anderem in G. Peskir und A. Shiryaev [27] und A. Shiryayev [31] betrachtet wird, ist die Optimierungsaufgabe,

$$EY(\tau) \text{ über } \tau \in \mathcal{S}^T \text{ zu maximieren.}$$

Wird diese Optimierungsaufgabe auf das Problem mit mehreren Ausübungsrechten übertragen, erhält man verschiedene Möglichkeiten dieses zu modellieren, von denen auf drei im folgenden Abschnitt eingegangen wird.

3.1 Modell

Zunächst werden zwei Modelle formuliert, bei denen bis zum Zeitpunkt T die n verschiedenen Ausübungsrechte wahrgenommen werden müssen:

Definition 3.2. Für alle $\sigma \in \mathcal{S}^T$ sei

(i) im Falle $n \neq 0$

(a) $\mathcal{S}_\sigma^{T,n} := \{\tau \in (\mathcal{S}_\sigma^T)^n;\ \forall i \in \mathbb{N}_{\leq n-1} : \tau_i + \delta \leq \tau_{i+1}\}$ und

$$Z_n^T(\sigma) := \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_\sigma^{T,n}} E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big). \tag{3.2}$$

(b) $\tilde{\mathcal{S}}_\sigma^{T,n} := \{\tau \in (\mathcal{S}_\sigma^T)^n;\ \forall i \in \mathbb{N}_{\leq n-1} : (\tau_i + \delta) \wedge T \leq \tau_{i+1}\}$ und

$$\tilde{Z}_n^T(\sigma) := \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \tilde{\mathcal{S}}_\sigma^{T,n}} E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big). \tag{3.3}$$

(ii) im Falle $n = 0$

$$Z_0^T(\sigma) := \tilde{Z}_0^T(\sigma) :\equiv 0. \tag{3.4}$$

Dabei sei in (i) das essentielle Supremum über die leere Menge konstant null gesetzt.

Für alle $\sigma \in \mathcal{S}^T$ enthält die Obermenge $\tilde{\mathcal{S}}_\sigma^{T,n}$ von $\mathcal{S}_\sigma^{T,n}$ auch die n-fachen Ausübungsstrategien, die zum Zeitpunkt T gleichzeitige Ausübungen beinhalten. Dadurch können sich wie im folgenden Beispiel die jeweiligen optimalen Familien von Stoppzeiten unterscheiden:

Beispiel 3.3. Es sei $(n-1)\delta \leq T$, also insbesondere $\mathcal{S}_0^{T,n} \neq \emptyset$.

(i) Ist der Auszahlungsprozess Y ein Submartingal, so erhält man

(a) $Z_n^T(0) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} E\big(Y(T - i\delta)\big)$;

(b) $\tilde{Z}_n^T(0) = nE\big(Y(T)\big)$.

(ii) Gegeben sei ein Black-Scholes-Modell mit endlichem Horizont T, Zinsrate ρ und Aktienpreisprozess $(A(t))_{t\in[0,T]}$. Weiter sei $K \in \mathbb{R}_{>0}$. Es gilt für den abdiskontierten Auszahlungsprozess eines amerikanischen Calls $\Big(e^{-\rho t}(A(t) - K)^+\Big)_{t\in[0,T]}$ mit Ausübungspreis K und für das äquivalente Martingalmaß Q

(a) $\sup\limits_{\tau \in \mathcal{S}_0^{T,n}} E_Q\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} e^{-\rho\tau_i}(A(\tau_i)-K)^+\Big) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} E_Q\Big(e^{-\rho(T-i\delta)}(A(T-i\delta)-K)^+\Big);$

(b) $\sup\limits_{\tau \in \tilde{\mathcal{S}}_0^{T,n}} E_Q\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} e^{-\rho\tau_i}(A(\tau_i)-K)^+\Big) = n\, E_Q\Big(e^{-\rho T}(A(T)-K)^+\Big).$

Beweis. Zu (i): Sei $\tau \in \mathcal{S}_\sigma^{T,n}$ und $\nu \in \tilde{\mathcal{S}}_\sigma^{T,n}$. Es gilt für alle $i \in \mathbb{N}_{\leq n}$

$$\tau_i \leq T-(n-i)\delta \quad \text{und} \quad \nu_i \leq T.$$

Damit erhält man mit dem Optional-Sampling-Theorem für Submartingale

$$E\Big(\sum_{i=1}^{n} Y(\tau_i)\Big) \leq E\Big(\sum_{i=1}^{n} Y(T-(n-i)\delta)\Big) = \sum_{i=0}^{n-1} E\big(Y(T-i\delta)\big)$$

und

$$E\Big(\sum_{i=1}^{n} Y(\nu_i)\Big) \leq nE\big(Y(T)\big),$$

woraus zusammen mit $\Big(T-(n-1)\delta, T-(n-2)\delta, ..., T\Big) \in \mathcal{S}_\sigma^{T,n}$ und $(T, ..., T) \in \tilde{\mathcal{S}}_\sigma^{T,n}$ die Aussage (i) resultiert.

Zu (ii): Da der stochastische Prozess $\Big(e^{-\rho t}(A(t)-K)^+\Big)_{t\in[0,T]}$ ein Submartingal bzgl. Q bildet, folgt die zweite Aussage direkt aus (i). □

Anmerkung 3.4. Sei $\gamma \in]0, T[$. Das Maximierungsproblem (3.3) liegt häufig bei der Bewertung von den in Abschnitt 1.2 beschriebenen Mitarbeiteroptionen zugrunde, dessen Inhaber bis zum Zeitpunkt $T-\gamma$ im Unternehmen beschäftigt sind: Da diese Mitarbeiter weder den Aktienkurs zum Zeitpunkt T kurzfristig beeinflussen noch ab $T-\gamma$ auf eine langfristige Steigerung des Aktienkurses hinarbeiten können, wird ihnen in der Regel ermöglicht ihre restlichen Optionen zum Zeitpunkt T einzulösen. Mit den Bezeichnungen aus 1.2.(i) ist dann der maximal erwartete Gewinn durch

$$\tilde{Z}_n^T(0) = \sup_{\tau \in \tilde{\mathcal{S}}_0^{T,n}} E\Big(\sum_{i=1}^{n} e^{-\rho\tau_i}\,\big(X(\tau_i)-K\big)^+\Big)$$

gegeben. Die Größe γ beträgt in den meisten Fällen das Doppelte oder Dreifache der refracting time δ.

Die folgende Definition beinhaltet ein Modell, in dem nicht alle Ausübungsrechte wahrgenommen werden müssen:

Definition 3.5. Für alle $\sigma \in \mathcal{S}^T$ sei

$$\hat{Z}_n^T(\sigma) := \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_\sigma^n} E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i \wedge T) 1_{\{\tau_i \le T\}} \Big| \mathcal{F}_\sigma\Big), \tag{3.5}$$

wobei mit $\mathcal{S}_\sigma^n$ die in 1.2 definierte Teilmenge von $(\mathcal{S}_\sigma)^n$ bezüglich der rechtsseitig-stetigen Filtration $\hat{\mathfrak{F}} = (\hat{\mathcal{F}})_{t \in \mathbb{R}_{\ge 0}}$ mit

$$\hat{\mathcal{F}}_t := \begin{cases} \mathcal{F}_t, & \text{falls } \ t \le T, \\ \mathcal{F}_T, & \text{sonst,} \end{cases}$$

bezeichnet sei.

Die Stoppprobleme (3.3) und (3.5) können nach den folgenden Sätzen jeweils auf ein Optimierungsproblem mit unendlichem Horizont übertragen werden:

Satz 3.6. *Es wird durch*

$$\tilde{Y}(t) := \begin{cases} Y(t), & \textit{falls } \ t \le T, \\ Y(T), & \textit{sonst,} \end{cases}$$

ein $\hat{\mathfrak{F}}$-adaptierter, nicht-negativer und rechtsseitig-stetiger stochastischer Prozess mit

$$\tilde{Z}_n^T(\sigma) = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_\sigma^n} E\Big(\sum_{i=1}^n \tilde{Y}(\tau_i) \Big| \mathcal{F}_\sigma\Big) \quad \textit{für alle } \sigma \in \mathcal{S}^T \tag{3.6}$$

definiert.

Beweis. Sei $\sigma \in \mathcal{S}^T$.

$\underline{" \le "}$: Definiere für alle $(\rho_1, ..., \rho_n) \in \tilde{\mathcal{S}}_\sigma^{T,n}$ und $i \in \mathbb{N}_{\le n}$ die Menge $A_i := \{\rho_i = T\}$ und $\tilde{\rho}_i := 1_{A_i^c}\, \rho_i + (T + i\delta) 1_{A_i}$. Dann ist $(\tilde{\rho}_1, ..., \tilde{\rho}_n)$ in $\mathcal{S}_\sigma^n$ enthalten und es gilt für alle $i \in \{1, ..., n\}$ die Gleichung $Y(\rho_i) = \tilde{Y}(\tilde{\rho}_i)$.

$\underline{" \ge "}$: Für alle $\tau \in \mathcal{S}_\sigma^n$ ist $\tilde{\tau} := (\tau_1 \wedge T, ..., \tau_n \wedge T)$ in $\tilde{\mathcal{S}}_\sigma^{T,n}$ enthalten und erfüllt nach der Definition von $\tilde{Y}$ die Gleichung $Y(\tilde{\tau}_i) = \tilde{Y}(\tau_i)$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$. □

Satz 3.7. *Es wird durch*

$$\hat{Y}(t) := \begin{cases} Y(t), & \textit{falls } \ t \le T, \\ 0, & \textit{sonst,} \end{cases}$$

ein $\hat{\mathfrak{F}}$-adaptierter und nicht-negativer stochastischer Prozess mit

$$\hat{Z}_n^T(\sigma) = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_\sigma^n} E\Big(\sum_{i=1}^n \hat{Y}(\tau_i) \Big| \mathcal{F}_\sigma\Big) \quad \textit{für alle } \sigma \in \mathcal{S}^T \tag{3.7}$$

definiert.

Beweis. Es sei $\sigma \in \mathcal{S}^T$. Die Gleichung (3.7) resultiert unmittelbar aus

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{Y}(\tau_i) = \sum_{i=1}^{n} Y(\tau_i \wedge T) 1_{\{\tau_i \leq T\}}$$

für alle $\tau \in \mathcal{S}_\sigma^n$. □

3.2 Überführung in ein klassisches Stoppproblem mit endlichem Horizont

In diesem Abschnitt wird das in Definition 3.2 formulierte Optimierungsproblem (3.2) in ein klassisches Stoppproblem mit endlichem Horizont überführt. Dafür wird, der Beweisidee von R. Carmona und S. Dayanik [6] folgend, zunächst für jede Stoppzeit σ die Gleichung

$$Z_{n+1}^T(\sigma) = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_\sigma^{T-n\delta}} E\Big(Y(\tau) + E\big(Z_n^T(\tau+\delta)|\mathcal{F}_\tau\big)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big)$$

bewiesen. Für den Beweis benötigt man folgende wichtige Eigenschaften von $\mathcal{S}_\sigma^{T,n}$:

Lemma 3.8. *Für alle $\sigma \in \mathcal{S}^T$ gilt:*

(i) $\mathcal{S}_\sigma^{T,n} \subseteq \tilde{\mathcal{S}}_\sigma^{T,n}$.

(ii) Die Menge $\mathcal{S}_\sigma^{T,n}$ ist bzgl. der komponentenweisen Maximums- und Minimumsbildung abgeschlossen, d.h. für alle $\tau, \rho \in \mathcal{S}_\sigma^{T,n}$ sind

$$\tau \wedge \rho := (\min\{\tau_1, \rho_1\}, ..., \min\{\tau_n, \rho_n\}) \quad \textit{und} \quad \tau \vee \rho := (\max\{\tau_1, \rho_1\}, ..., \max\{\tau_n, \rho_n\})$$

in $\mathcal{S}_\sigma^{T,n}$ enthalten.

(iii) $\mathcal{S}_\sigma^{T,n+1} = \{\tau \in \mathcal{S}_\sigma^{n+1};\ \tau_1 \in \mathcal{S}_\sigma^{T-n\delta},\ (\tau_2, ..., \tau_{n+1}) \in \mathcal{S}_{\tau_1+\delta}^{T,n}\}$.

(iv) Die Menge $\{E\Big(\sum_{i=1}^{n} Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big);\ \tau \in \mathcal{S}_\sigma^{T,n}\}$ ist nach oben gerichtet, wobei eine Menge M nach gerichtet ist, wenn für alle $a, b \in M$ ein $c \in M$ existiert mit $\max\{a, b\} \leq c$.

Beweis. Die Aussagen (i) bis (iii) folgen direkt aus den Definitionen von $\mathcal{S}_\sigma^{T,n}$ und $\tilde{\mathcal{S}}_\sigma^{T,n}$.

Zu (iv): Seien $\tau, \rho \in \mathcal{S}_\sigma^{T,n}$. Definiere

$$A := \Big\{E\Big(\sum_{i=1}^{n} Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \geq E\Big(\sum_{i=1}^{n} Y(\rho_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big)\Big\}$$

und für alle $i \in \mathbb{N}_{\leq n}$

$$\nu_i := 1_A \tau_i + 1_{A^c} \rho_i.$$

Dann ist ν in $\mathcal{S}_\sigma^{T,n}$ enthalten und es gilt

$$E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\nu_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) = \max\Big\{E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big),\ E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\rho_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big)\Big\}. \qquad \square$$

Daraus erhält man für $Z_n^T(\sigma)$

Lemma 3.9. *Für alle $\sigma \in \mathcal{S}^T$ gilt:*

(i) $Z_n^T(\sigma) \leq \tilde{Z}_n^T(\sigma)$.

(ii) Ist $\sigma \leq T-(n-1)\delta$, existiert eine Folge $(\tau^k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{S}_\sigma^{T,n})^{\mathbb{N}}$ mit

$$Z_n^T(\sigma) = \lim_{k\to\infty} \uparrow E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i^k)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big).$$

(iii) $E(Z_n^T(\tau)|\mathcal{F}_\sigma) \leq Z_n^T(\sigma)$ *für alle $\tau \in \mathcal{S}_\sigma^T$.*

Beweis. Es sei $\sigma \in \mathcal{S}^T$.

Zu (i): Die erste Aussage resultiert aus Lemma 3.8.(i) und Definition 3.2.

Zu (ii): Es sei $\sigma \leq T-(n-1)\delta$. Nach Lemma 3.8.(iv) ist die nicht leere Menge $\{E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\rho\Big);\ \tau \in \mathcal{S}_\rho^{T,n}\}$ nach oben gerichtet. Daraus folgt die zweite Aussage zusammen mit G. Peskir und A. Shiryaev [27, Lemma 1.3].

Zu (iii): Sei $\tau \in \mathcal{S}_\sigma^T$. Es wird zunächst der Fall $\tau \leq T-(n-1)\delta$ betrachtet. Nach (ii) existiert $(\tau^k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{S}_\tau^{T,n})^{\mathbb{N}}$ mit

$$Z_n^T(\tau) = \lim_{k\to\infty} \uparrow E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i^k)\Big|\mathcal{F}_\tau\Big).$$

Daraus erhält man mit der monotonen Konvergenz

$$\begin{aligned} E(Z_n^T(\tau)|\mathcal{F}_\sigma) &= E\Big(\lim_{k\to\infty} \uparrow E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i^k)\Big|\mathcal{F}_\tau\Big)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \\ &= \lim_{k\to\infty} \uparrow E\Big[E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i^k)\Big|\mathcal{F}_\tau\Big)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big] \\ &= \lim_{k\to\infty} \uparrow E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i^k)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \leq Z_n^T(\sigma). \end{aligned}$$

Ist die Ungleichung $\tau \leq T-(n-1)\delta$ nicht erfüllt, gilt nach Definition 3.2

$$E(Z_n^T(\tau)|\mathcal{F}_\sigma) = E(0|\mathcal{F}_\sigma) = 0 \leq Z_n^T(\sigma). \qquad \square$$

Mit den vorherigen Hilfssätzen erhält man die oben beschriebene Darstellung von $Z^T_{n+1}(\sigma)$:

Satz 3.10. *Für alle $\sigma \in \mathcal{S}^T$ gilt*

$$Z^T_{n+1}(\sigma) = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}^{T-n\delta}_\sigma} E\Big(Y(\tau) + E\big(Z^T_n(\tau+\delta)|\mathcal{F}_\tau\big)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big). \tag{3.8}$$

Beweis. Es sei $\sigma \in \mathcal{S}^T$.
Da die Menge $\mathcal{S}^{T,n+1}_\sigma$ genau dann leer ist, wenn dies auf $\mathcal{S}^{T-n\delta}_\sigma$ zutrifft, sei o.B.d.A. für den Beweis von (3.8) $\mathcal{S}^{T,n+1}_\sigma, \mathcal{S}^{T-n\delta}_\sigma \neq \emptyset$.

Zu (3.8) " $\leq$ ": Sei $\tau \in \mathcal{S}^{T,n+1}_\sigma$. Nach Lemma 3.8.(iii) ist τ_1 in $\mathcal{S}^{T-n\delta}_\sigma$ und $(\tau_2, ..., \tau_{n+1})$ in $\mathcal{S}^{T,n}_{\tau_1+\delta}$ enthalten. Daraus resultiert zusammen mit den Eigenschaften des bedingten Erwartungswertes

$$\begin{aligned}
E\Big(\sum_{i=1}^{n+1} Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) &= E\Big[Y(\tau_1) + E\Big(\sum_{i=2}^{n+1} Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_{\tau_1+\delta}\Big)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big] \\
&\leq E\Big(Y(\tau_1) + Z^T_n(\tau_1+\delta)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \\
&= E\Big[Y(\tau_1) + E\Big(Z^T_n(\tau_1+\delta)\Big|\mathcal{F}_{\tau_1}\Big)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big] \\
&\leq \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}^{T-n\delta}_\sigma} E\Big(Y(\tau) + E\big(Z^T_n(\tau+\delta)|\mathcal{F}_\tau\big)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big).
\end{aligned}$$

Zu (3.8) " $\geq$ ": Sei $\tau_1 \in \mathcal{S}^{T-n\delta}_\sigma$. Da $\tau_1 + \delta \leq T - (n-1)\delta$, existiert nach Lemma 3.9.(ii) eine Folge $(\tau^k_2, ..., \tau^k_{n+1})_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{S}^{T,n}_{\tau_1+\delta})^{\mathbb{N}}$ mit

$$Z^T_n(\tau_1+\delta) = \lim_{k\to\infty} \uparrow E\Big(\sum_{i=2}^{n+1} Y(\tau^k_i)\Big|\mathcal{F}_{\tau_1+\delta}\Big).$$

Da $(\tau_1, \tau^k_2, ..., \tau^k_{n+1})$ nach Lemma 3.8.(iii) für alle $k \in \mathbb{N}$ in $\mathcal{S}^{T,n+1}_\sigma$ enthalten ist, gilt zusammen mit den Eigenschaften des bedingten Erwartungswertes

$$\begin{aligned}
Z^T_{n+1}(\sigma) &\geq \limsup_{k\to\infty} E\Big(Y(\tau_1) + \sum_{i=2}^{n+1} Y(\tau^k_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \\
&= \limsup_{k\to\infty} E\Big[Y(\tau_1) + E\Big(\sum_{i=2}^{n+1} Y(\tau^k_i)\Big|\mathcal{F}_{\tau_1+\delta}\Big)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big] \\
&= E\Big[Y(\tau_1) + \lim_{k\to\infty} \uparrow E\Big(\sum_{i=2}^{n+1} Y(\tau^k_i)\Big|\mathcal{F}_{\tau_1+\delta}\Big)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big] \\
&= E\Big(Y(\tau_1) + Z^T_n(\tau_1+\delta)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \\
&= E\Big(Y(\tau_1) + E\big(Z^T_n(\tau_1+\delta)|\mathcal{F}_{\tau_1}\big)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big).
\end{aligned}$$

□

Wird Lemma 1.9 auf ein Modell mit endlichem Horizont übertragen erhält man

Definition und Lemma 3.11. *Der stochastische Prozess*

$$\Big(\check{Z}_n^T(t)\Big)_{t\in[0,T]} := \Big(E(Z_n^T(t+\delta)|\mathcal{F}_t)\Big)_{t\in[0,T]} \tag{3.9}$$

ist ein Supermartingal.

Beweis. Es gilt nach Lemma 3.9.(iii) für alle $0 \le s < t \le T$

$$E\Big(E(Z_n^T(t+\delta)|\mathcal{F}_t)\Big|\mathcal{F}_s\Big) = E\Big(E(Z_n^T(t+\delta)|\mathcal{F}_{s+\delta}\Big|\mathcal{F}_s\Big) \le E(Z_n^T(s+\delta)|\mathcal{F}_s). \qquad \square$$

Es folgt der Hauptsatz dieses Abschnittes:

Satz 3.12. *Sei $T \ge n\delta$. Der stochastische Prozess $\Big(\check{Z}_n^T(t)\Big)_{t\in[0,T-n\delta]}$ besitzt eine $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T-n\delta]}$-adaptierte und rechtsseitig-stetige Modifikation $\check{Z}_n^{T,r}$ mit*

(i) $E(Z_n^T(\tau+\delta)|\mathcal{F}_\tau) = \check{Z}_n^{T,r}(\tau)$ für alle $\tau \in \mathcal{S}^{T-n\delta}$.

(ii) $Y_{n+1} := Y + \check{Z}_n^{T,r}$ ist ein $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T-n\delta]}$-adaptierter und rechtsseitig-stetiger Prozess mit

$$Z_{n+1}^T(\sigma) = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_\sigma^{T-n\delta}} E(Y_{n+1}(\tau)|\mathcal{F}_\sigma) \tag{3.10}$$

für alle $\sigma \in \mathcal{S}^{T-n\delta}$.

Beweis. (Durch Induktion über n.)

I.A.: Für $n = 0$ erhält man (i) und (ii) für $\check{Z}_0^{T,r} :\equiv 0$ direkt aus der Definition 3.2.

I.S.: Es gelten nun die obigen Aussagen für ein festes n mit $T \ge (n+1)\delta$.
Dann ist $Y_{n+1} = Y + \check{Z}_n^{T,r}$ ein $\mathfrak{F}$-adaptierter und rechtsseitig-stetiger stochastischer Prozess, und es folgt mit (3.10) und (3.1)

$$\begin{aligned}\sup_{\tau\in\mathcal{S}^{T-n\delta}} E(Y_{n+1}(\tau)) = Z_{n+1}^T(0) &= \sup_{\tau\in\mathcal{S}_0^{T-n\delta,n+1}} E\Big(\sum_{i=1}^{n+1} Y(\tau_i)\Big) \\ &\le (n+1)\, E\Big(\sup_{t\in[0,T]} Y(t)\Big) < \infty.\end{aligned}$$

Also existiert nach I. Karatzas und S. Shreve [21, Appendix D] das minimal dominierende rechtsseitig-stetige Supermartingal $Z_{n+1}^{T,r}$ von Y_{n+1}. Für dieses gilt nach (3.10) und (3.9) für alle $t \in [0, T-n\delta]$

$$E\Big(Z_{n+1}^{T,r}(t+\delta)\Big) = E\Big(Z_{n+1}^T(t+\delta)\Big) = E(\check{Z}_{n+1}^T(t)). \tag{3.11}$$

Weiter folgt aus den Eigenschaften des minimal dominierenden Supermartingals

$$Z_{n+1}^{T,r}(\sigma) = Z_{n+1}^T(\sigma) \quad \text{für alle } \sigma \in \mathcal{S}^{T-n\delta}. \tag{3.12}$$

Es wird nun gezeigt, dass der Prozess $(\check{Z}^T_{n+1}(t))_{t\in[0,T-(n+1)\delta]}$ eine rechtsseitig-stetige Modifikation $\check{Z}^{T,r}_{n+1}$ besitzt: Da $(\check{Z}^T_{n+1}(t))_{t\in[0,T-(n+1)\delta]}$ nach Lemma 3.11 ein Supermartingal ist, besitzt nach I. Karatzas und S. Shreve [20, Theorem 3.13] $(\check{Z}^T_{n+1}(t))_{t\in[0,T-(n+1)\delta]}$ genau dann eine rechtsseitig-stetige Modifikation, wenn die Abbildung

$$f : [0, T-(n+1)\delta[\to \mathbb{R},\ t \mapsto E(\check{Z}^T_{n+1}(t))$$

rechtsseitig-stetig ist. Da erneut nach I. Karatzas und S. Shreve [20, Theorem 3.13] die Abbildung

$$[0, T-n\delta[\to \mathbb{R},\ t \mapsto E(Z^{T,r}_{n+1}(t))$$

rechtsseitig-stetig ist, resultiert diese Eigenschaft von f direkt aus (3.11) und der Stetigkeit von

$$[0, T-(n+1)\delta[\to [\delta, T-n\delta[,\ t \mapsto t+\delta.$$

Als nächstes wird gezeigt, dass $\check{Z}^{T,r}_{n+1}$ die Eigenschaft (i) erfüllt: Sei $\tau \in \mathcal{S}^{T-(n+1)\delta}$. Es existiert eine Folge von beschränkten und monoton fallenden Stoppzeiten $(\tau_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit endlichem Wertebereich und $\tau_k \downarrow \tau$ für $k \to \infty$. Daraus erhält man mit dem Optional-Sampling-Theorem für Supermartingale und dem Lemma von Fatou

$$\limsup_{k\to\infty} \int_A \check{Z}^{T,r}_{n+1}(\tau_k)d\mathcal{P} \le \int_A \check{Z}^{T,r}_{n+1}(\tau)d\mathcal{P} \le \liminf_{k\to\infty} \int_A \check{Z}^{T,r}_{n+1}(\tau_k)d\mathcal{P},$$

also

$$\int_A \check{Z}^{T,r}_{n+1}(\tau)d\mathcal{P} = \lim_{k\to\infty} \int_A \check{Z}^{T,r}_{n+1}(\tau_k)d\mathcal{P} \quad \text{für alle } A \in \mathcal{F}_\tau \tag{3.13}$$

und analog

$$\int_A Z^{T,r}_{n+1}(\tau+\delta)d\mathcal{P} = \lim_{k\to\infty} \int_A Z^{T,r}_{n+1}(\tau_k+\delta)d\mathcal{P} \quad \text{für alle } A \in \mathcal{F}_\tau. \tag{3.14}$$

Weiter resultiert aus dem endlichen Wertebereich von τ_k für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\check{Z}^T_{n+1}(\tau_k) = E\Big(Z^T_{n+1}(\tau_k+\delta)|\mathcal{F}_{\tau_k}\Big),$$

also

$$\begin{aligned}\int_A \check{Z}^{T,r}_{n+1}(\tau_k)d\mathcal{P} &= \int_A \check{Z}^T_{n+1}(\tau_k)d\mathcal{P} = \int_A E\Big(Z^T_{n+1}(\tau_k+\delta)|\mathcal{F}_{\tau_k}\Big)d\mathcal{P} = \\ &= \int_A Z^T_{n+1}(\tau_k+\delta)d\mathcal{P} = \int_A Z^{T,r}_{n+1}(\tau_k+\delta)d\mathcal{P}\end{aligned}$$

für alle $A \in \mathcal{F}_\tau$. Daraus erhält man zusammen mit (3.13), (3.14) und (3.12)

$$\int_A \check{Z}^{T,r}_{n+1}(\tau)d\mathcal{P} = \int_A Z^{T,r}_{n+1}(\tau+\delta)d\mathcal{P} = \int_A Z^T_{n+1}(\tau+\delta)d\mathcal{P}$$

für alle $A \in \mathcal{F}_\tau$, woraus die Aussage (i) für $\check{Z}^{T,r}_{n+1}$ resultiert.

Die Aussage (ii) folgt aus (i) zusammen mit (3.8). □

3.3 Eine Anwendung der Doob-Meyer Zerlegung

Ein analytisches mehrfaches Optimierungsproblem 3.13.
Es sei für die Einführung dieses Abschnittes vorausgesetzt, dass für alle $t \in [0,T]$ der Auszahlungsprozess Y zum Zeitpunkt t konstant und $\mathcal{F}_t$ die triviale σ-Algebra $\{\emptyset, \Omega\}$ ist. Dann ist die Abbildung $f : [0,T] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit

$$Y(t) \equiv f(t) \quad \text{für alle } t \in [0,T]$$

rechtsseitig-stetig und für alle $s \in [0,T]$ das analytische Optimierungsproblem (3.2) durch

$$U_n(s) := \sup\{\sum_{i=1}^{n} f(t_i);\ t_1, ..., t_n \in [s,T] \ \wedge\ \forall i \in \mathbb{N}_{\leq n-1} : t_i + \delta \leq t_{i+1}\}$$

gegeben. Weiter ist das in Satz 3.12 definierte Supermartingal $\check{Z}_n^{T,r}$ die Abbildung

$$\check{U}_n : [0, T - n\delta] \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad t \mapsto U_n(t + \delta)$$

und die im vorherigen Abschnitt bewiesene Gleichung (3.10) das Maximierungsproblem

$$U_{n+1}(s) = \sup\{f(t) + \check{U}_n(t);\ t \in [s, T - n\delta]\}.$$

Aus der Gleichung $\check{U}_n(t) \equiv \check{Z}_n^{T,r}(t) \equiv E\check{Z}_n^{T,r}(t)$ und der Supermartingaleigenschaft von $\check{Z}_n^{T,r}$ erhält man die Antitonie von $\check{U}_n$. Außerdem ist $\check{U}_n(t)$ konstant $A_n^T(t)$, wobei mit A_n^T der monoton fallende Prozess aus der Doob-Meyer Zerlegung von $\check{Z}_n^{T,r}$ bezeichnet sei.

In diesem Abschnitt wird ohne die obigen Voraussetzungen der stochastische Prozess $\check{Z}_n^{T,r}$ mit A_n^T dargestellt. Als Vorbereitung dient

Lemma 3.14. *Sei $T \geq n\delta$. Die Familie $\left(\check{Z}_n^{T,r}(\tau)\right)_{\tau \in \mathcal{S}^{T-n\delta}}$ ist gleichgradig integrierbar.*

Beweis. Es gilt nach Satz 3.12.(i) und Lemma 3.9.(iii) für alle $\tau \in \mathcal{S}^{T-n\delta}$

$$0 \leq \check{Z}_n^{T,r}(\tau) = E(Z_n^T(\tau + \delta)|\mathcal{F}_\tau) \leq Z_n^T(\tau) \leq E(n \sup_{t \in [0,T]} Y(t)|\mathcal{F}_\tau).$$

Daraus resultiert obige Aussage zusammen mit der gleichgradigen Integrierbarkeit von $\left(E(n \sup_{t\in[0,T]} Y(t)|\mathcal{F}_\tau)\right)_{\tau \in \mathcal{S}^T}$. □

Für den Rest dieses Abschnitts sei die Ungleichung $T \geq n\delta$ gültig. Eine Darstellung von $\check{Z}_n^{T,r}$ mit Hilfe des Prozesses A_n^T beinhaltet

Satz 3.15. *Definiere* $c_n^T := E(Z_n^T(\delta))$. *Es existiert ein* $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T-n\delta]}$*-adaptierter, rechtsseitig-stetiger, monoton fallender und vorhersehbarer Prozess* $(A_n^T(t))_{t\in[0,T-n\delta]}$ *mit*

$$E\Big(Z_{n+1}^T(\sigma)\Big) = c_n^T + \sup_{\tau\in\mathcal{S}_\sigma^{T-n\delta}} E\Big(Y(\tau) + A_n^T(\tau)\Big) \tag{3.15}$$

für alle $\sigma \in \mathcal{S}^{T-n\delta}$. *Weiter gilt für jede optimale Stoppzeit* $\tau^* \in \mathcal{S}_\sigma^{T-n\delta}$ *von (3.10)*

$$\sup_{\tau\in\mathcal{S}_\sigma^{T-n\delta}} E\Big(Y(\tau) + A_n^T(\tau)\Big) = E\Big(Y(\tau^*) + A_n^T(\tau^*)\Big).$$

Beweis. Da nach Lemma 3.14 die Familie $\Big(\check{Z}_n^{T,r}(\tau)\Big)_{\tau\in\mathcal{S}^{T-n\delta}}$ gleichgradig integrierbar ist, existiert nach der Doob-Meyer Zerlegung für Supermartingale ein rechtsseitig-stetiges Martingal M und ein $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T-n\delta]}$-adaptierter, rechtsseitig-stetiger, monoton fallender und vorhersehbarer Prozess $(A_n^T(t))_{t\in[0,T-n\delta]}$ mit

$$M(0) = \check{Z}_n^{T,r}(0) \quad \text{und} \quad \check{Z}_n^{T,r} = M + A_n^T.$$

Es folgt mit dem Optional-Sampling-Theorem für alle $\sigma \in \mathcal{S}^{T-n\delta}$ und $\tau \in \mathcal{S}_\sigma^{T-n\delta}$

$$\begin{aligned} E\Big(Y(\tau) + \check{Z}_n^{T,r}(\tau)\Big) &= E\Big(M(\tau)\Big) + E\Big(Y(\tau) + A_n^T(\tau)\Big) \\ &= E\Big(\check{Z}_n^{T,r}(0)\Big) + E\Big(Y(\tau) + A_n^T(\tau)\Big) \\ &= E\Big(E(Z_n^T(0+\delta)|\mathcal{F}_0)\Big) + E\Big(Y(\tau) + A_n^T(\tau)\Big) \\ &= c_n^T + E\Big(Y(\tau) + A_n^T(\tau)\Big). \end{aligned}$$

Daraus resultiert die Aussage (i) zusammen mit (3.10).

Ist der Auszahlungsprozess Y stetig, so ist der bis auf Ununterscheidbarkeit eindeutig bestimmten stochastische Prozess A_n^T ebenfalls stetig. Für den Beweis dieser Aussage benötigt man die beiden folgenden Hilfssätze:

Lemma 3.16. *Sei* $(X(t))_{t\in[0,T]}$ *ein* $\mathcal{F}$*-adaptierter und stetiger stochastischer Prozess mit*

$$E\Big(\sup_{t\in[0,T]} |X(t)|\Big) < \infty. \tag{3.16}$$

Definiere für alle $\sigma \in \mathcal{S}^T$

$$Z(\sigma) := \operatorname{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_\sigma^T} E\Big(X(\tau)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big). \tag{3.17}$$

Dann ist das minimal dominierende rechtsseitig-stetige Supermartingal Z° *von* X *regulär, d.h. für alle* $\nu \in \mathcal{S}^T$ *und* $(\nu_m)_{m\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{S}^T)^{\mathbb{N}}$ *mit* $\nu_m \uparrow \nu$ *für* $m \to \infty$ *gilt*

$$\lim_{m\to\infty} E\Big(Z^\circ(\nu_m)\Big) = E\Big(Z^\circ(\nu)\Big).$$

Beweis. Sei $\nu \in \mathcal{S}^T$ und $(\nu_m)_{m\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{S}^T)^{\mathbb{N}}$ mit $\nu_m \uparrow \nu$ für $m \to \infty$. Es gilt aufgrund der Supermartingaleigenschaft von Z°

$$E\Big(Z^\circ(\nu)\Big) \leq \liminf_{m\to\infty} E\Big(Z^\circ(\nu_m)\Big).$$

Weiter wird durch

$$D_*(\nu_m) := \inf\{t \in [\nu_m, T];\ Z^\circ(t) = X(t)\}$$

eine monoton steigende Folge von Stoppzeiten $\Big(D_*(\nu_m)\Big)_{m\in\mathbb{N}}$ definiert. Insbesondere ist $\lim\limits_{m\to\infty} D_*(\nu_m)$ in $\mathcal{S}^T_\nu$ enthalten und mit I. Karatzas und S. Shreve [21, Theorem D.12] erhält man

$$E\Big(X(D_*(\nu_m))|\mathcal{F}_{\nu_m}\Big) = Z^\circ(\nu_m) = Z(\nu_m).$$

Daraus folgt zusammen mit der Stetigkeit von X

$$\begin{aligned}
\limsup_{m\to\infty} E\Big(Z^\circ(\nu_m)\Big) &= \limsup_{m\to\infty} E\Big(X(D_*(\nu_m))\Big) \\
&\leq E\Big(X(\lim_{m\to\infty} D_*(\nu_m))\Big) \\
&\overset{X\leq Z^\circ}{\leq} E\Big(Z^\circ(\lim_{m\to\infty} D_*(\nu_m))\Big) \\
&\leq E\Big(Z^\circ(\nu)\Big).
\end{aligned}$$

□

Lemma 3.17. *Sei mit $(Y + \check{Z}^{T,r}_n)^\circ$ das minimal dominierende rechtsseitig-stetige Supermartingal von $Y + \check{Z}^{T,r}_n$ bezeichnet. Es gilt im Falle $T \geq (n+1)\delta$:*
Ist $(Y + \check{Z}^{T,r}_n)^\circ$ regulär, so auch $\check{Z}^{T,r}_{n+1}$.

Beweis. Es gilt nach Satz 3.12.(i) und (ii) für alle $\tau \in \mathcal{S}^{T-n\delta}$

$$E\Big(\check{Z}^{T,r}_{n+1}(\tau)\Big) = E\Big(E(Z^T_{n+1}(\tau+\delta)|\mathcal{F}_\tau)\Big) = E\Big(Z^T_{n+1}(\tau+\delta)\Big) = E\Big((Y + \check{Z}^{T,r}_n)^\circ(\tau+\delta)\Big).$$

□

Damit erhält man mir der Bezeichnung aus Lemma 3.17

Satz 3.18. *Ist Y stetig, so ist $(Y + \check{Z}^{T,r}_n)^\circ$ regulär.*

Beweis. (Durch Induktion über n.)

I.A.: Für $n = 0$ gilt nach der Definition 3.2.(ii) $\check{Z}^{T,r}_0 \equiv 0$. Daraus resultiert obige Aussage für $n = 0$ zusammen mit Lemma 3.16.

I.S.: Es sei $(Y + \check{Z}^{T,r}_n)^\circ$ regulär und die Ungleichung $T \geq (n+1)\delta$ erfüllt.
Nach Lemma 3.17 ist das Supermartingal $\check{Z}^{T,r}_{n+1}$ regulär, woraus nach I. Karatzas und S. Shreve [20, Theorem 4.14] die Stetigkeit des in Satz 3.15 definierten integrierbaren

stochastischen Prozesses A_{n+1}^T resultiert. Weiter gilt aufgrund der Antitonie von A_{n+1}^T, $A_{n+1}^T(0) = 0$ und (3.1)

$$\begin{aligned} & E\Big(\sup_{t\in[0,T-(n+1)\delta]} |Y(t) + A_{n+1}^T(t)|\Big) \\ \leq\ & E\Big(\sup_{t\in[0,T-(n+1)\delta]} |Y(t)| + \sup_{t\in[0,T-(n+1)\delta]} |A_{n+1}^T(t)|\Big) \\ =\ & E\Big(\sup_{t\in[0,T-(n+1)\delta]} |Y(t)|\Big) + E\Big(|A_{n+1}^T(T-(n+1)\delta)|\Big) \\ <\ & \infty. \end{aligned}$$

Außerdem erhält man mit (3.10) und (3.15) für alle $\sigma \in \mathcal{S}^{T-(n+1)\delta}$

$$E\Big((Y + \check{Z}_{n+1}^{T,r})^\circ(\sigma)\Big) = E\Big(Z_{n+2}^T(\sigma)\Big) = c_{n+1}^T + \sup_{\tau\in\mathcal{S}_\sigma^{T-(n+1)\delta}} E\Big(Y(\tau) + A_{n+1}^T(\tau)\Big)$$

Da $Y + A_{n+1}^T$ stetig ist und die Bedingung (3.16) für den Horizont $T-(n+1)\delta$ erfüllt, folgt daraus zusammen mit Lemma 3.16 die Regularität von $(Y + \check{Z}_{n+1}^{T,r})^\circ$. □

Satz 3.19. *Ist der Auszahlungsprozess Y stetig, so auch der (bis auf Ununterscheidbarkeit) eindeutig bestimmte stochastische Prozess A_n^T.*

Beweis. Es sei der Auszahlungsprozess Y stetig und $T \geq (n+1)\delta$. Nach Satz 3.18 und Lemma 3.17 ist das Supermartingal $\check{Z}_{n+1}^{T,r}$ regulär. Daraus folgt die Stetigkeit von A_{n+1}^T nach I. Karatzas und S. Shreve [20, Theorem 4.14]. Außerdem gilt nach der Definition 3.2.(ii) $\check{Z}_0^{T,r} \equiv 0$. Also ist $A_0^T \equiv 0$ ebenfalls stetig. □

3.4 Zusammenhang zwischen endlichem und unendlichem Horizont

Es sei daran erinnert, dass in diesem Abschnitt nicht das Modell 3.1, sondern das Modell 1.1 betrachtet wird. Weiter seien für diesen Abschnitt die Anzahl der Ausübungsrechte $n \in \mathbb{N}$ und eine refracting time $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ fixiert. Um die Zusammenhänge zwischen den mehrfachen Stoppproblemen mit endlichem und unendlichem Horizont darzustellen, wird zunächst die Definition 3.2 übertragen:

Definition 3.20. Für alle $T \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\sigma \in \mathcal{S}$ seien

(i) $\mathcal{S}_\sigma^{T,n} = \{\tau \in \mathcal{S}_\sigma^n;\ \tau_n \leq T\}$ und
$\tilde{\mathcal{S}}_\sigma^{T,n} = \{\tau \in (\mathcal{S}_\sigma)^n;\ \tau_1 \leq ... \leq \tau_n \leq T,\ \forall i \in \mathbb{N}_{\leq n-1} : (\tau_i + \delta) \wedge T \leq \tau_{i+1}\}$.

(ii) Entsprechend zu (3.2) und (3.3) seien

$$Z_n^T(\sigma) := \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_\sigma^{T,n}} E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \quad \text{und} \quad \tilde{Z}_n^T(\sigma) := \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \tilde{\mathcal{S}}_\sigma^{T,n}} E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big).$$

Dabei sei erneut das essentielle Supremum über die leere Menge konstant null gesetzt.

Strebt der Zeithorizont von $Z_n^T(\sigma)$ gegen unendlich, so erhält man das Stoppproblem mit unendlichem Horizont (1.6) als punktweisen Grenzübergang:

Satz 3.21. *Es sei σ eine beschränkte Stoppzeit. Der stochastische Prozess $\Big(Z_n^T(\sigma)\Big)_{T\in\mathbb{R}_{>0}}$ ist monoton steigend mit*

$$\lim_{T\to\infty} \uparrow Z_n^T(\sigma) = Z_n(\sigma). \tag{3.18}$$

Beweis. $\left(\mathcal{S}_\sigma^{T,n}\right)_{T\in\mathbb{R}_{>0}}$ ist eine aufsteigende Familie von Mengen. Daraus resultiert unmittelbar die Isotonie von $\Big(Z_n^T(\sigma)\Big)_{T\in\mathbb{R}_{>0}}$ und somit die Existenz der Grenzfunktion $\lim_{T\to\infty} \uparrow Z_n^T(\sigma)$.

Zu (3.18) " $\leq$ ": Für alle $T > 0$ ist $\mathcal{S}_\sigma^{T,n}$ in $\mathcal{S}_\sigma^n$ enthalten, also $Z_n^T(\sigma) \leq Z_n(\sigma)$.

Zu (3.18) " $\geq$ ": Sei $\tau \in \mathcal{S}_\sigma^n$. Definiere für jeden Horizont $T > 0$ und alle $i \in \mathbb{N}_{\leq n}$ die Menge $A_{i,T} := \{\tau_i \geq T - (n-i)\delta\}$ und die Stoppzeit

$$\rho_i^T := 1_{A_{i,T}^c}\, \tau_i + (T-(n-i)\delta)1_{A_{i,T}}.$$

Für alle $T > 0$ ist $(A_{i,T})_{i\in\mathbb{N}_{\leq n}}$ aufsteigend und es gilt für alle $i \in \mathbb{N}_{<n}$

$$\begin{aligned}
\rho_i^T + \delta &= 1_{A_{i+1,T}^c}\, \rho_i^T + 1_{A_{i+1,T}\setminus A_{i,T}}\, \rho_i^T + 1_{A_{i,T}}\, \rho_i^T + \delta \\
&= 1_{A_{i+1,T}^c}\, \tau_i + 1_{A_{i+1,T}\setminus A_{i,T}}\, \tau_i + (T-(n-i)\delta)1_{A_{i,T}} + \delta \\
&= 1_{A_{i+1,T}^c}\, (\tau_i+\delta) + 1_{A_{i+1,T}\setminus A_{i,T}}\, (\tau_i+\delta) + (T-(n-i)\delta+\delta)1_{A_{i,T}} \\
&\leq 1_{A_{i+1,T}^c}\, \tau_{i+1} + 1_{A_{i+1,T}\setminus A_{i,T}}\, (\tau_i+\delta) + (T-(n-i-1)\delta)1_{A_{i,T}} \\
&\leq 1_{A_{i+1,T}^c}\, \tau_{i+1} + (T-(n-i)\delta+\delta)1_{A_{i+1,T}\setminus A_{i,T}} + (T-(n-i-1)\delta)1_{A_{i,T}} \\
&= \rho_{i+1}^T \\
&\leq T
\end{aligned} \tag{3.19}$$

und im Falle $T \geq \sigma + (n-1)\delta$

$$\rho_1^T = 1_{A_{1,T}^c}\, \tau_1 + (T-(n-1)\delta)1_{A_{1,T}} \geq 1_{A_{1,T}^c}\, \sigma + 1_{A_{1,T}}\, \sigma = \sigma.$$

Also ist für alle $T \geq \sigma + (n-1)\delta$ das Tupel $(\rho_i^T)_{i\leq n}$ in $\mathcal{S}_\sigma^{T,n}$ enthalten, woraus zusammen mit

$$Y(\tau_i) = Y(\tau_i)\lim_{m\to\infty} 1_{A_{i,m}^c} + \lim_{m\to\infty}\Big(Y(m-(n-i)\delta)1_{A_{i,m}}\Big) = \lim_{m\to\infty} Y(\rho_i^m)$$

die Ungleichung

$$E\Big(\sum_{i=1}^{n} Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big)= E\Big(\sum_{i=1}^{n} \lim_{m\to\infty} Y(\rho_i^m)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big)= \lim_{m\to\infty} E\Big(\sum_{i=1}^{n} Y(\rho_i^m)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big)\le \lim_{T\to\infty} Z_n^T(\sigma)$$

resultiert. □

Unter der Voraussetzung $\lim_{t\to\infty} Y(t) = 0$ erfüllt $\lim_{T\to\infty} \tilde{Z}_n^T(\sigma)$ ebenfalls die Gleichung (3.18):

Satz 3.22. *Sei σ eine beschränkte Stoppzeit. Ist $\lim_{t\to\infty} Y(t) = 0$, so gilt*

$$\lim_{T\to\infty} \tilde{Z}_n^T(\sigma) = Z_n(\sigma). \tag{3.20}$$

Beweis. Sei $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine unbeschränkte und monoton steigende Folge mit Werten in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ und $a_1 \geq \sigma$. Es gilt nach Lemma 3.8.(i) und (3.18)

$$\liminf_{m\to\infty} \tilde{Z}_n^{a_m}(\sigma) \geq \liminf_{m\to\infty} Z_n^{a_m}(\sigma) = Z_n(\sigma).$$

Sei $k \in \mathbb{N}$ und $\tau \in \tilde{S}_\sigma^{a_k,n}$. Definiere für alle $i \in \mathbb{N}_{\leq n}$ die Menge $A_i := \{\tau_i = a_k\}$ und

$$\rho_i := 1_{A_i^c}\, \tau_i + (a_k + i\delta)1_{A_i}.$$

Dann ist $(\rho_1, ..., \rho_n)$ in $\mathcal{S}_\sigma^{a_k+n\delta,n}$ enthalten und es gilt

$$\begin{aligned}
E\Big(\sum_{i=1}^{n} Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) &= E\Big(\sum_{i=1}^{n} Y(\tau_i)1_{A_i^c}\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) + E\Big(\sum_{i=1}^{n} Y(\tau_i)1_{A_i}\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \\
&\leq E\Big(\sum_{i=1}^{n} Y(\tau_i)1_{A_i^c}\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) + E\Big(n\, Y(a_k)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \\
&\leq E\Big(\sum_{i=1}^{n} Y(\tau_i)1_{A_i^c} + Y(a_k + i\delta)1_{A_i}\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) + E\Big(n\, Y(a_k)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \\
&= E\Big(\sum_{i=1}^{n} Y(\rho_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) + E\Big(n\, Y(a_k)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \\
&\leq Z_n^{a_k+n\delta}(\sigma) + E\Big(n\, Y(a_k)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big).
\end{aligned}$$

Daraus folgt zusammen mit (3.18) und $\lim_{t\to\infty} Y(t) = 0$

$$\begin{aligned}
\limsup_{m\to\infty}\ \tilde{Z}_n^{a_m}(\sigma) &\leq \limsup_{m\to\infty} \Big[Z_n^{a_m+n\delta}(\sigma) + E\Big(n\, Y(a_m)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big)\Big] \\
&= \lim_{m\to\infty} Z_n^{a_m+n\delta}(\sigma) + \lim_{m\to\infty} E\Big(n\, Y(a_m)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \\
&= Z_n(\sigma).
\end{aligned}$$

□

3.5 Statistische Optimierungsprobleme

Mit Hilfe des Grenzüberganges (3.21) werden in diesem Abschnitt die *mehrfachen statistischen Optimierungsprobleme* jeweils in ein klassisches Problem des optimalen Stoppens überführt. Dafür werden in 3.5.3 zunächst *statistische Stoppprobleme mit endlichem Horizont* gemäß des folgenden Modells betrachtet:

3.5.1 Modell

Für die Unterabschnitte 3.5.1 bis 3.5.3 sei erneut das Modell 3.1 gegeben. Weiter sei $c : [0, T] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte und rechtsseitig-stetige Funktion und $X = (X(t))_{t\in[0,T]}$ ein $\mathfrak{F}$-adaptierter und rechtsseitig-stetiger stochastischer Prozess mit

$$X(t) := Y(t) - c(t).$$

Definiere für alle $\sigma \in \mathcal{S}^T$

$$V_n^T(\sigma) := \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_\sigma^{T,n}} E\Big(\sum_{i=1}^{n} X(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big), \tag{3.21}$$

wobei das essentielle Supremum über die leere Menge konstant $-\infty$ gesetzt sei.

3.5.2 Beispiel: Produktionsplanung mit beschränkten Ressourcen

Das Optimierungsproblem (3.21) tritt neben dem Bereich der Statistik und Finanzmathematik auch im Bereich der *Produktions- und Projektplanung mit beschränkten Ressourcen* auf: Wie von W. Domschke [12, Kapitel 3] und von A. Drexl [11, Kapitel 5.5] beschrieben, stehen der Produktion oder dem Projekt n Mengeneinheiten einer bestimmten *Ressource* zur Verfügung, die ein materielles oder immaterielles Gut sein kann, zum Beispiel Betriebsmittel, Geldmittel, Boden, Rohstoffe, Energie oder Personen und (Arbeits-) Zeit. Wird eine Mengeneinheit zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ aufgebraucht, beschreibt $Y(t)$ den entstandenen Ertrag und $c(t)$ die entstandenen Kosten. Dabei werden häufig die folgenden Kosten berücksichtigt:

- *Bestellkosten*, die beim Einholen von Angeboten und bei Prüfvorgängen bei Eingang der Ware entstehen.

- *Lagerhaltungskosten*, die bei wertvollen Produkten hauptsächlich *Kapitalbindungskosten* und *Opportunitätskosten* sind.

- *Fehlmengenkosten*, die sich durch erhöhte Kosten für Nachlieferung, Konventionsstrafen und entgangene Deckungsbeiträge zusammensetzen.

Der Prozess Y ist ein stochastischer Prozess, da Nachfrageverläufe, Bestelldauern und Fertigungsprozesse in der Regel nicht exakt vorhersagbar sind. Die σ-Algebra $\mathcal{F}_t$ beinhaltet entsprechend die Informationen über diese Daten, vor allem über dem Absatzverlauf, zum Zeitpunkt t. Die refracting time δ kann je nach Ressource zum Beispiel die Länge des Zeitraumes sein, die man zum Einholen von Angeboten benötigt oder die gesetzlich vorgeschriebene oder tariflich vereinbarte Länge der Ruhezeit zwischen zwei Arbeitszeiten. Die Optimierungsaufgabe

$$V_n^T(0) = \sup_{\tau \in \mathcal{S}_0^{T,n}} E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i) - c(\tau_i)\Big)$$

ist, den erwarteten Gewinn der Produktion oder des Projekts innerhalb des *Planungshorizontes* $[0,T]$ zu maximieren.

3.5.3 Statistische Optimierungsprobleme mit endlichem Horizont

Um die Ergebnisse aus Abschnitt 3.2 auf (3.21) anwenden zu können, benötigt man folgende bekannte Eigenschaft des essentiellen Supremums:

Bemerkung 3.23. *Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine Familie von Zufallsgrößen.*
Es gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\gamma \in \mathbb{R}$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{i\in I}(\lambda U_i + \gamma) = \lambda\,(\operatorname*{ess\,sup}_{i\in I} U_i) + \gamma. \tag{3.22}$$

Damit erhält man

Lemma 3.24. *Es gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \mathcal{S}^T$*

$$\lambda V_n^T(\sigma) + n\gamma = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_\sigma^{T,n}} E\Big(\sum_{i=1}^n \Big(\lambda X(\tau_i) + \gamma\Big)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big). \tag{3.23}$$

Beweis. Es gilt nach Bemerkung 3.23 für alle $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \mathcal{S}^T$

$$\begin{aligned}
\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_\sigma^{T,n}} E\Big(\sum_{i=1}^n \Big(\lambda X(\tau_i) + \gamma\Big)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) &= \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_\sigma^{T,n}} E\Big(\lambda\Big(\sum_{i=1}^n X(\tau_i)\Big) + n\gamma\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \\
&= \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_\sigma^{T,n}} \Big(\lambda E\Big(\sum_{i=1}^n X(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) + n\gamma\Big) \\
&= \lambda\Big(\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_\sigma^{T,n}} E\Big(\sum_{i=1}^n X(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big)\Big) + n\gamma \\
&= \lambda V_n^T(\sigma) + n\gamma.
\end{aligned}$$

□

Da X auch Werte in $\mathbb{R}_{<0}$ annehmen kann, wird in der folgenden Definition der nicht-negative Prozess $U = X + s$ eingeführt, wobei s eine Schranke von $|c|$ ist. Anschließend wird das Optimierungsproblem (3.21) auf diesen Prozess übertragen:

Definition und Lemma 3.25. *Es sei s eine Schranke von $|c|$.*

(i) $U := X + s$ ist ein $\mathfrak{F}$-adaptierter, nicht-negativer und rechtsseitig-stetiger Prozess mit der Eigenschaft

$$E\Big(\sup_{t\in[0,T]} U(t)\Big) < \infty.$$

(ii) Definiere für alle $\sigma \in \mathcal{S}^T$

$$G_n^T(\sigma) := \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_\sigma^{T,n}} E\Big(\sum_{i=1}^n U(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big).$$

Es gilt für alle $t \in [0, T - n\delta]$

$$\check{V}_n^T(t) := E\Big(V_n^T(t+\delta)\Big|\mathcal{F}_t\Big) = E\Big(G_n^T(t+\delta)\Big|\mathcal{F}_t\Big) - ns. \tag{3.24}$$

Beweis. Zu (i): Es gilt nach (3.1)

$$E\Big(\sup_{t\in[0,T]} U(t)\Big) = E\Big(\sup_{t\in[0,T]} Y(t) - c(t) + s\Big) \le E\Big(\sup_{t\in[0,T]} Y(t)\Big) + 2s < \infty.$$

Zu (ii): Mit 3.23 erhält man für alle $t \in [0, T - n\delta]$

$$\begin{aligned}
E\Big(G_n^T(t+\delta)\Big|\mathcal{F}_t\Big) &= E\Big(\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_{t+\delta}^{T,n}} E\Big(\sum_{i=1}^n U(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_{t+\delta}\Big)\Big|\mathcal{F}_t\Big)\\
&= E\Big(\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_{t+\delta}^{T,n}} E\Big(\sum_{i=1}^n X(\tau_i) + s\Big|\mathcal{F}_{t+\delta}\Big)\Big|\mathcal{F}_t\Big)\\
&= E\Big(\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_{t+\delta}^{T,n}} E\Big(\sum_{i=1}^n X(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_{t+\delta}\Big)\Big|\mathcal{F}_t\Big) + ns\\
&= E\Big(V_n^T(t+\delta)\Big|\mathcal{F}_t\Big) + ns.
\end{aligned}$$

□

Satz 3.26. *Sei $T \ge n\delta$. Es existiert eine rechtsseitig-stetige $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T-n\delta]}$-adaptierte Modifikation $\check{V}_n^{T,r}$ von $\check{V}_n^T$ mit*

$$V_{n+1}^T(\sigma) = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_\sigma^{T-n\delta}} E\Big((Y + \check{V}_n^{T,r})(\tau) - c(\tau)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \tag{3.25}$$

für alle $\sigma \in \mathcal{S}^{T-n\delta}$.

Beweis. Nach Satz 3.12 und Lemma 3.25 besitzt der Prozess

$$\left(\check{G}_n^T(t)\right)_{t\in[0,T-n\delta]} := \left(E\left(G_n^T(t+\delta)\Big|\mathcal{F}_t\right)\right)_{t\in[0,T-n\delta]}$$

eine rechtsseitig-stetige Modifikation $\check{G}_n^{T,r}$ mit

$$G_{n+1}^T(\sigma) = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_\sigma^{T-n\delta}} E\left((U+\check{G}_n^{T,r})(\tau)\Big|\mathcal{F}_\sigma\right)$$

für alle $\sigma \in \mathcal{S}^{T-n\delta}$. Also ist nach (3.24) der Prozess $\check{V}_n^{T,r} := \check{G}_n^{T,r} - ns$ eine rechtsseitig-stetige Modifikation von $\check{V}_n^T$. Für diese gilt

$$\begin{aligned}
V_{n+1}^T(\sigma) &\overset{3.24}{=} G_{n+1}^T(\sigma) - (n+1)s \\
&= \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_\sigma^{T-n\delta}} E\left((U+\check{G}_n^{T,r})(\tau)\Big|\mathcal{F}_\sigma\right) - (n+1)s \\
&\overset{X=U-s,3.23}{=} \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_\sigma^{T-n\delta}} E\left((X+\check{G}_n^{T,r})(\tau) - ns\Big|\mathcal{F}_\sigma\right) \\
&\overset{X=Y-c}{=} \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_\sigma^{T-n\delta}} E\left((Y+\check{V}_n^{T,r})(\tau) - c(\tau)\Big|\mathcal{F}_\sigma\right)
\end{aligned}$$

für alle $\sigma \in \mathcal{S}^{T-n\delta}$. □

3.5.4 Statistische Optimierungsprobleme mit unendlichem Horizont

In diesem Abschnitt wird das Modell 1.1 betrachtet. Um den Satz 3.26 auf dieses Modell mit unendlichem Horizont zu übertragen, sei nun $c : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ eine monoton steigende und rechtsseitig-stetige Abbildung. Weiter sei der rechtsseitig-stetige und $\mathfrak{F}$-adaptierte stochastische Prozess $X = (X(t))_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ erneut durch

$$X(t) := Y(t) - c(t)$$

gegeben und für alle $\sigma \in \mathcal{S}$

$$V_n(\sigma) := \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_\sigma^n\cap(\mathcal{S}_c)^n} E\left(\sum_{i=1}^n X(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\right), \tag{3.26}$$

wobei mit $\mathcal{S}_c$ die Menge der Stoppzeiten τ mit $E(|c(\tau)|) < \infty$ bezeichnet sei. Außerdem sei für alle $T \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\sigma \in \mathcal{S}$ die Menge $\mathcal{S}_\sigma^{T,n}$ und $Z_n^T(\sigma)$ wie in 3.20 definiert.
Indem man von c auf $c-c(0)$ übergeht, kann man nach Bemerkung 3.23 o.B.d.A. zusätzlich $c(0) = 0$ fordern. Es sei daran erinnert, dass der Prozess Y nach (1.1) die Eigenschaft

$$E\left(\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} Y(t)\right) < \infty$$

erfüllt.

Satz 3.27. *Es sei σ eine beschränkte Stoppzeit.*

(i) Der stochastische Prozess $\Big(V_n^T(\sigma)\Big)_{T\in\mathbb{R}_{>0}}$ ist monoton steigend mit

$$\lim_{T\to\infty} \uparrow V_n^T(\sigma) = V_n(\sigma). \tag{3.27}$$

(ii) Für die Menge der beschränkten Stoppzeiten $\mathcal{S}_B$ gilt

$$V_n(\sigma) = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_\sigma^n\cap(\mathcal{S}_B)^n} E\Big(\sum_{i=1}^n X(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big). \tag{3.28}$$

Beweis. $\big(\mathcal{S}_\sigma^{T,n}\big)_{T\in\mathbb{R}_{>0}}$ ist eine aufsteigende Familie von Mengen. Daraus resultiert unmittelbar die Isotonie von $\Big(V_n^T(\sigma)\Big)_{T\in\mathbb{R}_{>0}}$ und somit die Existenz der Grenzfunktion $\lim\limits_{T\to\infty} V_n^T(\sigma)$. Als nächstes wird die Beweisidee der Gleichung (3.18) auf (3.27) übertragen, wobei der Beweis der Ungleichung $\lim\limits_{T\to\infty} V_n^T(\sigma) \le V_n(\sigma)$ wörtlich übernommen werden kann.

Zu (3.27) " $\geq$ ": Sei $\tau \in \mathcal{S}_\sigma^n \cap \mathcal{S}_c$. Definiere für jeden Horizont $T > 0$ und alle $i \in \mathbb{N}_{\le n}$ die Menge $A_{i,T} := \{\tau_i \ge T - (n-i)\delta\}$ und die Stoppzeit

$$\rho_i^T := 1_{A_{i,T}^c}\,\tau_i + (T-(n-i)\delta)1_{A_{i,T}}.$$

Für alle $T > \sigma + (n-1)\delta$ ist $(\rho_i^T)_{i\le n}$ nach (3.19) in $\mathcal{S}_\sigma^{T,n}$ enthalten. Weiter folgt aus $\rho_n^T \le \tau_n$ und der Monotonie von c für alle $T > 0$ und $i \in \mathbb{N}_{\le n}$

$$|X(\rho_i^T)| \le |Y(\rho_i^T)| + |c(\rho_i^T)| \le \sup_{t\in\mathbb{R}_{\ge0}} Y(t) + c(\rho_n^T) \le \sup_{t\in\mathbb{R}_{\ge0}} Y(t) + c(\tau_n).$$

Da $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}_{\ge0}} Y(t) + c(\tau_n)$ integrierbar ist, erhält man zusammen mit

$$Y(\tau_i) = Y(\tau_i)\lim_{m\to\infty} 1_{A_{i,m}^c} + \lim_{m\to\infty}\Big(Y(m-(n-i)\delta)1_{A_{i,m}}\Big) = \lim_{m\to\infty} Y(\rho_i^m)$$

und der dominierten Konvergenz die Ungleichung

$$E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) = E\Big(\sum_{i=1}^n \lim_{m\to\infty} Y(\rho_i^m)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) = \tag{3.29}$$

$$= \lim_{m\to\infty} E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\rho_i^m)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \le \lim_{T\to\infty} Z_n^T(\sigma).$$

Zu (3.28): Für alle $\tau \in \mathcal{S}_\sigma^n$ gilt mit den obigen Bezeichnungen nach (3.29)

$$E\Big(\sum_{i=1}^n X(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) = \lim_{m\to\infty} E\Big(\sum_{i=1}^n X(\rho_i^m)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \overset{\rho\in(\mathcal{S}_B)^n}{\le} \operatorname*{ess\,sup}_{\nu\in\mathcal{S}_\sigma^n\cap(\mathcal{S}_B)^n} E\Big(\sum_{i=1}^n X(\nu_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big). \quad \square$$

Für die Formulierung des Hauptsatzes dieses Abschnittes benötigt man

Bezeichnung und Bemerkung 3.28. *Es sei mit* $\mathcal{S}_c^*$ *die Menge der Stoppzeiten* τ *mit* $E(c(\tau+n\delta)) < \infty$ *bezeichnet. Existieren* $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ *und* $d \in \mathbb{R}$ *mit* $c = \lambda\, id_{\mathbb{R}_{>0}} + d$, *so ist in diesem Fall* $\mathcal{S}_c^* = \{\tau \in \mathcal{S};\ E(\tau) < \infty\}$. *Weiter ist aufgrund der Isotonie von* c *die Menge* $\mathcal{S}_c^*$ *in* $\mathcal{S}_c$ *enthalten.*

Mit dieser Bezeichnung wird der Satz 3.26 folgendermaßen auf ein Optimierungsproblem mit unendlichem Horizont übertragen:

Satz 3.29. *Es existiert ein* $\mathfrak{F}$*-adaptierter und rechtsseitig-stetiger Prozess* $\check{V}_n^{\infty,r}$ *mit*

$$\begin{aligned} V_{n+1}(\sigma) &= \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_\sigma \cap \mathcal{S}_B} E\Big((Y + \check{V}_n^{\infty,r})(\tau) - c(\tau)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) & (3.30)\\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_\sigma \cap \mathcal{S}_c^*} E\Big((Y + \check{V}_n^{\infty,r})(\tau) - c(\tau)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) & (3.31) \end{aligned}$$

für jede beschränkte Stoppzeit σ.

Beweis. Es gilt für alle $s, T \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $n\delta \le s \le T$ und $u \in [0, s - n\delta]$

$$\check{V}_n^{s,r}(u) = E\Big(V_n^s(u+\delta)\Big|\mathcal{F}_u\Big) \le E\Big(V_n^T(u+\delta)\Big|\mathcal{F}_u\Big) = \check{V}_n^{T,r}(u).$$

Also ist $(\check{V}_n^{m,r})_{m \in \mathbb{N}_{\ge n\delta}}$ im Sinne von Definition 1.18 eine aufsteigende Folge von rechtsseitig-stetigen Supermartingalen und es gilt für alle $m \in \mathbb{N}_{\ge n\delta}$ und $s \in [0, m - n\delta]$

$$-nc(m) \le -n\,c(s+n\delta) \le E\Big(\sum_{i=1}^{n} -c(s+i\delta)\Big|\mathcal{F}_s\Big) \le E(V_n^m(s+\delta)|\mathcal{F}_s) = \check{V}_n^{m,r}(s) \quad (3.32)$$

und

$$\check{V}_n^{m,r}(s) = E(V_n^m(s+\delta)|\mathcal{F}_s) \le nE\Big(\sup_{t \in \mathbb{R}_{\ge 0}} Y(t)\Big|\mathcal{F}_s\Big). \quad (3.33)$$

Also besitzt nach Lemma 1.19 das Supermartingal

$$\Big(\check{V}_n^{\infty}(s)\Big)_{s \in \mathbb{R}_{\ge 0}} := \Big(\lim_{m\to\infty} \uparrow \check{V}_n^{m,r}(s)\Big)_{s \in \mathbb{R}_{\ge 0}} = \Big(\lim_{T\to\infty} \uparrow \check{V}_n^{T,r}(s)\Big)_{s \in \mathbb{R}_{\ge 0}}$$

eine rechtsseitig-stetige Modifikation $\check{V}_n^{\infty,r}$.

<u>Zu (3.30) " $\le$ ":</u> Für $\check{V}_n^{\infty,r}$ gilt nach (3.27) und (3.25)

$$\begin{aligned} V_{n+1}(\sigma) &= \lim_{T\to\infty} V_{n+1}^T(\sigma)\\ &= \lim_{T\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_\sigma^{T-n\delta}} E\Big((Y + \check{V}_n^{T,r})(\tau) - c(\tau)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big)\\ &\le \lim_{T\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_\sigma^{T-n\delta}} E\Big((Y + \check{V}_n^{\infty,r})(\tau) - c(\tau)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big)\\ &\le \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_\sigma \cap \mathcal{S}_B} E\Big((Y + \check{V}_n^{\infty,r})(\tau) - c(\tau)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \end{aligned}$$

für jede beschränkte Stoppzeit σ.

Zu (3.30) " $\geq$ ": Sei $\sigma \in \mathcal{S}_B$, $\tau \in \mathcal{S}_\sigma \cap \mathcal{S}_B$ und $s \in \mathbb{R}_{>0}$ eine obere Schranke von τ. Es existiert eine Folge von monoton fallenden und durch s beschränkten Stoppzeiten $(\tau_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\tau_k \downarrow \tau$ für $k \to \infty$ und τ_k nimmt für alle $k \in \mathbb{N}$ nur endlich viele Werte an. Es gilt aufgrund der Supermartingaleigenschaft von $\check{V}_n^{\infty,r}$, (3.32) und der Isotonie von c für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}(Y + \check{V}_n^{\infty,r})(\tau_k) - c(\tau_k) &\geq E\Big(\check{V}_n^{\infty,r}(s)\Big|\mathcal{F}_{\tau_k}\Big) + Y(\tau_k) - c(\tau_k)\\ &\geq E\Big(-n\,c(s+n\delta)\Big|\mathcal{F}_{\tau_k}\Big) + Y(\tau_k) - c(\tau_k)\\ &\geq -n\,c(s+n\delta) - c(s).\end{aligned}$$

Daraus folgt zusammen mit dem Lemma von Fatou, (3.25) und (3.27)

$$\begin{aligned}E\Big((Y + \check{V}_n^{\infty,r})(\tau) - c(\tau)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) &\leq \liminf_{k\to\infty}\ E\Big((Y + \check{V}_n^{\infty,r})(\tau_k) - c(\tau_k)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big)\\ &= \liminf_{k\to\infty}\ E\Big((Y + \check{V}_n^{\infty})(\tau_k) - c(\tau_k)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big)\\ &\leq \liminf_{k\to\infty}\Big[\liminf_{m\to\infty}\ E\Big((Y + \check{V}_n^{m,r})(\tau_k) - c(\tau_k)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big)\Big]\\ &\leq \liminf_{m\to\infty}\ V_{n+1}^m(\sigma)\\ &= V_{n+1}(\sigma).\end{aligned}$$

Zu (3.31): Da $\mathcal{S}_B$ in $\mathcal{S}_c^*$ enthalten ist, reicht es für (3.31) die Ungleichung

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_\sigma\cap\mathcal{S}_c^*} E\Big((Y + \check{V}_n^{\infty,r})(\tau) - c(\tau)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_\sigma\cap\mathcal{S}_B} E\Big((Y + \check{V}_n^{\infty,r})(\tau) - c(\tau)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big)$$

zu zeigen. Es gilt nach (3.32) für alle $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$-n\,c(s+n\delta) \leq \check{V}_n^{\infty}(s) = \check{V}_n^{\infty,r}(s).$$

Daraus folgt mit der Isotonie von c und der rechtsseitigen Stetigkeit von c und $\check{V}_n^{\infty,r}$ für alle $\tau \in \mathcal{S}_c^*$ und $m \in \mathbb{N}$

$$-n\,c(\tau+n\delta) - c(\tau) \leq -n\,c((\tau\wedge m)+n\delta) - c(\tau\wedge m) \leq (Y + \check{V}_n^{\infty,r})(\tau\wedge m) - c(\tau\wedge m).$$

Also gilt nach dem Lemma von Fatou

$$\begin{aligned}E\Big((Y + \check{V}_n^{\infty,r})(\tau) - c(\tau)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) &\leq \liminf_{m\to\infty} E\Big((Y + \check{V}_n^{\infty,r})(\tau\wedge m) - c(\tau\wedge m)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big)\\ &\leq \operatorname*{ess\,sup}_{\rho\in\mathcal{S}_\sigma\cap\mathcal{S}_B} E\Big((Y + \check{V}_n^{\infty,r})(\rho) - c(\rho)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big)\end{aligned}$$

für alle $\tau \in \mathcal{S}_\sigma \cap \mathcal{S}_c^*$. □

Kapitel 4

Zufällige Wartezeiten

In den vorherigen Kapiteln wurden bei den mehrfachen Stoppproblemen (1.6) und (3.2) die Ausübungsrechte dadurch eingeschränkt, dass zwischen den einzelnen Ausübungen ein Zeitfenster von einer fest vorgegebenen Länge δ liegen muss. Im vorliegenden Kapitel werden zwei Modelle betrachtet, in denen diese Wartezeiten zufällig sind. Im ersten Modell sind die zufälligen Wartezeiten nicht-negative Zufallsgrößen:

Modell 4.1. Gegeben sei das Modell 1.1 und es sei eine feste Anzahl von Ausübungsrechten $n \in \mathbb{N}$ fixiert. Weiter seien $\delta_1, ..., \delta_{n-1}$ nicht-negative Zufallsgrößen.
Für alle $i \in \mathbb{N}_{<n}$ sei δ_i als die Wartezeit zu interpretieren, die der Inhaber einer Option mit n-Ausübungsrechten nach der i-ten Ausübung mindestens einhalten muss bevor er das nächste Recht wahrnehmen darf.

Übt der Inhaber das erste Mal mit der Strategie τ_1 aus und wartet mindestens δ_1 Zeiteinheiten, so sind die bis zum Zeitpunkt t beobachtbaren Ereignisse die Menge $\mathcal{F}_t \cup \{\{\tau_1 + \delta_1 \leq s\};\ s \leq t\}$. Dem Inhaber stehen also für die Strategie τ_2, mit der er das zweite Mal ausübt, zum Zeitpunkt t die Informationen $\mathcal{F}_t \cup \{\{\tau_1 + \delta_1 \leq s\};\ s \leq t\}$ zur Verfügung, d.h. τ_2 ist eine Stoppzeit bzgl. der Filtration $(\sigma(\mathcal{F}_t \cup \{\{\tau_1 + \delta_1 \leq s\};\ s \leq t\}))_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$. Die unterschiedlichen Darstellungen und zentralen Eigenschaften dieser Filtration sind Gegenstand des folgenden Abschnittes.
Anwendungsbeispiele für mehrfache Stoppprobleme mit zufälligen Wartezeiten werden in Abschnitt 4.6 beschrieben. Es sei weiter angemerkt, dass Optimierungsprobleme mit zufälligen Wartezeiten bisher in keiner mir bekannten Literatur behandelt wurden.

4.1 Zugrundeliegende Filtration

Definition 4.2. Für jede Abbildung $\rho : \Omega \to [0, \infty]$ sei $\mathcal{G}^\rho$ die kleinste Filtration bzgl. der ρ eine Stoppzeit ist, d.h.

$$\mathcal{G}^\rho = \Big(\bigcap \{ \mathcal{A}_t;\ \mathfrak{A} = (\mathcal{A}_s)_{s \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \text{ ist eine Filtration und } \rho \text{ ist eine } \mathfrak{A}\text{-Stoppzeit} \} \Big)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}.$$

Beispiele 4.3. Für jede Abbildung $\rho : \Omega \to [0, \infty]$ und alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist

(i) $\mathcal{G}^\rho_t$ in $\mathcal{F}_t$ enthalten, falls ρ eine $\mathfrak{F}$-Stoppzeit ist.

(ii) $\mathcal{G}^\rho_t = \{\emptyset, \Omega\}$, falls ρ konstant ist. □

Für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ erhält man für $\mathcal{G}^\rho_t$ die folgende Darstellung:

Satz 4.4. *Es gilt für jede Abbildung $\rho : \Omega \to [0, \infty]$ und alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$*

$$\mathcal{G}^\rho_t = \sigma\Big(\{ \{\rho \leq s\};\ s \leq t \} \Big) \tag{4.1}$$

$$= \sigma\Big(\rho\, 1_{[0,t]}(\rho),\ 1_{\{0\}}(\rho) \Big). \tag{4.2}$$

Beweis. Die Gleichung (4.1) erhält man unmittelbar mit der Definition 4.2. Weiter gilt für alle $s, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $s \leq t$

$$\{\rho \leq s\} = \{0 < \rho\, 1_{[0,t]} \rho \leq s\} \cup \{\rho = 0\} \in \sigma\Big(\rho\, 1_{[0,t]}(\rho),\ 1_{\{0\}}(\rho) \Big)$$

und für alle $s, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\{\rho\, 1_{[0,t]}(\rho) \leq s\} = \{\rho > t\} \cup \{\rho \leq s \wedge t\} \in \sigma\Big(\{ \{\rho \leq r\};\ r \leq t \} \Big).$$ □

Definition 4.5. (i) Für jede Filtration $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ und jede Abbildung $\rho : \Omega \to [0, \infty]$ sei $\mathfrak{A}^\rho = (\mathcal{A}^\rho_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ die kleinste rechtsseitig-stetige Filtrationsvergrößerung von $\mathfrak{A}$ bzgl. der ρ eine Stoppzeit ist, d.h. $\mathfrak{A}^\rho$ ist die von $\Big(\sigma(\mathcal{A}_t, \mathcal{G}^\rho_t) \Big)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ erzeugte rechtsseitig-stetige Filtration $\Big(\sigma(\mathcal{A}_t, \mathcal{G}^\rho_t) \Big)^+_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$.

(ii) Für alle Abbildungen $\rho_1, ..., \rho_n : \Omega \to [0, \infty]$ definiere für alle $i \in \{2, ..., n\}$ rekursiv $\mathfrak{A}^{\rho_1, \ldots, \rho_i} = \big(\mathfrak{A}^{\rho_1, \ldots, \rho_{i-1}} \big)^{\rho_i}$.

Direkt aus Definition 4.5.(i) erhält man folgende Charakterisierung von $\mathfrak{A}^\rho$:

Satz 4.6. *Mit den Bezeichnungen aus Definition 4.5 ist $\mathfrak{A}^\rho$ die von*

$$\Big(\sigma(\mathcal{A}_t, \{ \{\rho < s\};\ s \leq t \}) \Big)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$$

erzeugte rechtsseitig-stetige Filtration.

Beweis. $\Big(\sigma(\mathcal{A}_t, \{\{\rho < s\};\ s \leq t\})\Big)_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ ist die kleinste Filtrationsvergrößerung von $\mathfrak{A}$ bzgl. der ρ eine *Optionszeit* ist. Die Abbildung ρ wird als Optionszeit bzgl. einer Filtration $(\tilde{\mathcal{A}}(t))_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ bezeichnet, wenn für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt $\{\rho < t\} \in \tilde{\mathcal{A}}(t)$. Da ρ genau dann eine Optionszeit bzgl. einer rechtsseitig-stetigen Filtration ist, wenn ρ eine Stoppzeit bzgl. dieser Filtration ist, resultiert daraus obige Aussage zusammen mit Definition 4.5.(i). $\square$

Erste wichtige Eigenschaft von $\mathfrak{A}^\rho$ beinhaltet

Satz 4.7. *Mit den Bezeichnungen aus Definition 4.5 gilt:*

(i) $\mathfrak{A}^\rho = \mathfrak{A}$*, falls* ρ *eine* $\mathfrak{A}$*-Stoppzeit und* $\mathfrak{A}$ *rechtsseitig-stetig ist.*

(ii) $\mathcal{G}^\rho_{t-s} = \mathcal{G}^{\rho+s}_t$ *und* $\mathcal{A}^\rho_{t-s} \subseteq \mathcal{A}^{\rho+s}_t$ *für alle* $s, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ *mit* $s \leq t$.

(iii) $\mathcal{A}^{\sigma+\rho}_t \mid_{\{\sigma=\tau\}} = \mathcal{A}^{\tau+\rho}_t \mid_{\{\sigma=\tau\}}$ *für alle* $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ *und* $\mathfrak{A}$*-Stoppzeiten* σ *und* τ*, wobei* $\mathcal{C} \mid_D := \{C \cap D;\ C \in \mathcal{C}\}$ *für alle* $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Pot}(\Omega)$ *und* $D \subseteq \Omega$.
Also gilt insbesondere die Gleichung $\mathcal{A}^{\sigma+\rho}_t \mid_{\{\sigma=\lambda\}} = \mathcal{A}^{\lambda+\rho}_t \mid_{\{\sigma=\lambda\}}$ *für alle* $\lambda, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ *und jede* $\mathfrak{A}$*-Stoppzeit* σ.

(iv) $\mathcal{A}^{\sigma+\rho}_t \supseteq \mathcal{A}^{\tau+\rho}_t$ *für alle* $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ *und* $\mathfrak{A}$*-Stoppzeiten* σ, τ *mit abzählbarem Wertebereich und* $\sigma \leq \tau$.

Beweis. Zu (i): Mit Beispiel 4.3.(i) erhält man $\mathfrak{A}^\rho = \Big(\sigma(\mathcal{A}_t, \mathcal{G}^\rho_t)\Big)^+_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} \subseteq \mathfrak{A}^+ = \mathfrak{A}$.

Zu (ii): Es gilt nach (4.1) für alle $s, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $s \leq t$

$$\mathcal{G}^\rho_{t-s} = \sigma\Big(\{\{\rho \leq r\};\ r \leq t-s\}\Big) = \sigma\Big(\{\{\rho + s \leq r\};\ r \leq t\}\Big) = \mathcal{G}^{\rho+s}_t,$$

also

$$\sigma(\mathcal{A}_{t-s}, \mathcal{G}^\rho_{t-s}) = \sigma(\mathcal{A}_{t-s}, \mathcal{G}^{\rho+s}_t) \subseteq \sigma(\mathcal{A}_t, \mathcal{G}^{\rho+s}_t).$$

Zu (iii): Es seien σ, τ $\mathfrak{A}$-Stoppzeiten und $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Erneut mit (4.1) erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{\sigma+\rho}_t \mid_{\{\sigma=\tau\}} &= \sigma\Big(\{\{\sigma+\rho \leq s\};\ s \leq t\} \mid_{\{\sigma=\tau\}}\Big) \\ &= \sigma\Big(\{\{\tau+\rho \leq s\};\ s \leq t\} \mid_{\{\sigma=\tau\}}\Big) \\ &= \mathcal{G}^{\tau+\rho}_t \mid_{\{\sigma=\tau\}}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \sigma(\mathcal{A}_t, \mathcal{G}^{\sigma+\rho}_t) \mid_{\{\sigma=\tau\}} &= \sigma(\mathcal{A}_t \mid_{\{\sigma=\tau\}}, \mathcal{G}^{\sigma+\rho}_t \mid_{\{\sigma=\tau\}}) \\ &= \sigma(\mathcal{A}_t \mid_{\{\sigma=\tau\}}, \mathcal{G}^{\tau+\rho}_t \mid_{\{\sigma=\tau\}}) \\ &= \sigma(\mathcal{A}_t, \mathcal{G}^{\tau+\rho}_t) \mid_{\{\sigma=\tau\}}. \end{aligned}$$

Daraus resultiert die Aussage (iii) zusammen mit der Definition von $\mathfrak{A}^{\sigma+\rho}$.

Zu (iv): Seien σ, τ $\mathfrak{A}$-Stoppzeiten mit abzählbarem Wertebereich und $\sigma \leq \tau$. Weiter sei I eine abzählbare Indexmenge und $(\lambda_i)_{i \in I}$ eine Familie mit Werten in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\text{Bild}(\sigma) \cup \text{Bild}(\tau) = \{\lambda_i;\ i \in I\}$. Es gilt für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\begin{aligned}
\{\tau + \rho \leq t\} &= \bigcup_{i,j \in I} \{\sigma = \lambda_i\} \cap \{\tau = \lambda_j\} \cap \{\tau + \rho \leq t\} \\
&= \bigcup_{i,j \in I} \{\sigma = \lambda_i\} \cap \{\tau = \lambda_j\} \cap \{\lambda_j + \rho \leq t\} \\
&= \bigcup_{i,j \in I,\, \lambda_j \leq t} \{\sigma = \lambda_i\} \cap \{\tau = \lambda_j\} \cap \{\lambda_i + \rho \leq t + \lambda_i - \lambda_j\} \\
&\overset{\sigma \leq \tau}{=} \bigcup_{i,j \in I,\, \lambda_i \leq \lambda_j \leq t} \{\sigma = \lambda_i\} \cap \{\tau = \lambda_j\} \cap \{\sigma + \rho \leq t + \lambda_i - \lambda_j\} \\
&\in \bigcup_{i,j \in I,\, \lambda_i \leq \lambda_j \leq t} \sigma\Big(\mathcal{A}_{\lambda_i}, \mathcal{A}_{\lambda_j}, \mathcal{A}^{\sigma+\rho}_{t+\lambda_i-\lambda_j}\Big) \\
&\subseteq \mathcal{A}^{\sigma+\rho}_t,
\end{aligned}$$

also

$$\sigma(\mathcal{A}_t, \mathcal{G}^{\tau+\rho}_t) = \sigma(\mathcal{A}_t, \{\{\tau + \rho \leq s\}, s \leq t\}) \subseteq \sigma(\mathcal{A}_t, \mathcal{A}^{\sigma+\rho}_t) = \mathcal{A}^{\sigma+\rho}_t. \qquad \square$$

4.2 Ausübungsstrategien bei zufälligen Wartezeiten

In diesem Abschnitt werden die Strategien definiert, mit welchen eine Option mit n Ausübungsrechten und zufälligen Wartezeiten ausgeübt werden kann.

Definition 4.8. Sei $\delta := (\delta_1, ..., \delta_{n-1})$. Definiere für jede $\mathfrak{F}$-Stoppzeit σ

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}^n_\sigma(\delta, \mathfrak{F}) := \Big\{ &(\tau_1, ..., \tau_n);\ \tau_1 \text{ ist } \mathfrak{F}\text{-Stoppzeit und } \sigma \leq \tau_1, \\
&\tau_i \text{ ist } \mathfrak{F}^{\tau_1+\delta_1, ..., \tau_{i-1}+\delta_{i-1}}\text{-Stoppzeit und } \tau_{i-1} + \delta_{i-1} \leq \tau_i \\
&\text{für alle } i \in \{2, ..., n\} \Big\}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

und

$$\mathcal{S}^n_\sigma(\delta, \mathfrak{F})_{\text{disk}} := \Big\{ (\tau_1, ..., \tau_n) \in \mathcal{S}^n_\sigma(\delta, \mathfrak{F});\ \text{Bild}(\tau_1) \text{ abzählbar} \Big\}. \tag{4.4}$$

Ist die Filtration $\mathfrak{F}$ in einer der folgenden Aussagen inhaltlich nicht wichtig, so schreibt man auch kurz $\mathcal{S}^n_\sigma(\delta) := \mathcal{S}^n_\sigma(\delta, \mathfrak{F})$ und $\mathcal{S}^n_\sigma(\delta)_{\text{disk}} := \mathcal{S}^n_\sigma(\delta, \mathfrak{F})_{\text{disk}}$.

Es sei daran erinnert, dass $\mathcal{S}$ die Menge aller $\mathfrak{F}$-Stoppzeiten ist. Mit 4.3 und der Definition von $\mathcal{S}^n_\sigma(\delta)$ erhält man die

Beispiele 4.9. Für alle $\sigma \in \mathcal{S}$ ist

(i) $\mathcal{S}_\sigma^n(\delta) = \{\tau \in \mathcal{S}^n;\ \sigma \le \tau_1,\ \tau_{i-1} + \delta_{i-1} \le \tau_i$ für alle $i \in \{2, ..., n\}\}$, falls $\delta_1, ..., \delta_{n-1}$ $\mathfrak{F}$-Stoppzeiten sind.

(ii) $\mathcal{S}_\sigma^n(\delta)$ die in 1.2 definierte Menge $\mathcal{S}_\sigma^n$, falls $\delta_1, ..., \delta_{n-1}$ konstant gleich der in Abschnitt 1.1 eingeführten refracting time $\delta \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ sind. □

Lemma 4.10. *Die Mengen*

$$\{E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big);\ \tau \in \mathcal{S}_\sigma^n(\delta)\} \quad \textit{und} \quad \{E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big);\ \tau \in \mathcal{S}_\sigma^n(\delta)_{\text{disk}}\}$$

sind nach oben gerichtet.

Beweis. Seien $\tau, \rho \in \mathcal{S}_\sigma^n(\delta)$. Definiere analog zum Beweis von Lemma 3.8.(iv) die Menge

$$A := \Big\{E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \ge\ E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\rho_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big)\Big\}$$

und für alle $i \in \mathbb{N}_{\le n}$

$$\nu_i := 1_A \tau_i\ +\ 1_{A^c}\,\rho_i.$$

Dann ist ν_1 eine $\mathfrak{F}$-Stoppzeit mit $\sigma \le \nu_1$ und $\tau_{i-1} + \delta_{i-1} \le \tau_i$ für alle $i \in \{2, ..., n\}$. Als nächstes wird gezeigt, dass für alle $i \in \{2, ..., n\}$ ν_i eine $\mathfrak{F}^{\tau_1+\delta_1, ..., \tau_{i-1}+\delta_{i-1}}$-Stoppzeit ist. Dazu wird zunächst für alle $i \in \{1, ..., n-1\}$ durch Induktion über i

$$\mathcal{F}_t^{\tau_1+\delta_1, ..., \tau_i+\delta_i}\ |_{A\cap\{\sigma\le t\}} \subseteq \mathcal{F}_t^{\nu_1+\delta_1, ..., \nu_i+\delta_i} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_{\ge 0} \tag{4.5}$$

bewiesen:

<u>I.A.:</u> Es gilt für alle $s, t \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ mit $s \le t$ die Inklusion $\mathcal{F}_t\ |_{A\cap\{\sigma\le t\}} \subseteq \mathcal{F}_t^{\nu_1+\delta_1}$ und

$$\begin{aligned} & A \cap \{\sigma \le t\} \cap \{\tau_1 + \delta_1 \le s\} && (4.6)\\ = \ & A \cap \{\sigma \le t\} \cap A \cap \{\tau_1 + \delta_1 \le s\} \\ \in \ & \sigma\Big(\mathcal{F}_t,\ \{A \cap \{\tau_1 + \delta_1 \le r\};\ r \le t\}\Big) \\ = \ & \sigma\Big(\mathcal{F}_t,\ \{A \cap \{\sigma \le r\};\ r \le t\},\ \{A \cap \{\tau_1 + \delta_1 \le r\};\ r \le t\}\Big) \\ \subseteq \ & \sigma\Big(\mathcal{F}_t,\ \{A \cap \{\sigma \le r\};\ r \le t\}, \\ & \qquad \{\Big(A \cap \{\tau_1 + \delta_1 \le r\}\Big) \cup \Big(A^c \cap \{\rho_1 + \delta_1 \le r\}\Big);\ r \le t\}\Big) \\ = \ & \sigma\Big(\mathcal{F}_t,\ \{A \cap \{\sigma \le r\};\ r \le t\},\ \{\{\nu_1 + \delta_1 \le r\};\ r \le t\}\Big) \\ = \ & \sigma\Big(\mathcal{F}_t,\ \{\{\nu_1 + \delta_1 \le r\};\ r \le t\}\Big) \\ = \ & \sigma\Big(\mathcal{F}_t,\ \mathcal{G}_t^{\nu_1+\delta_1}\Big). \end{aligned}$$

Daraus folgt zusammen mit (4.1) für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\sigma(\mathcal{F}_t, \mathcal{G}_t^{\tau_1+\delta_1}) \mid_{A\cap\{\sigma\leq t\}} \subseteq \mathcal{F}_t^{\nu_1+\delta_1},$$

also für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\mathcal{F}_t^{\tau_1+\delta_1} \mid_{A\cap\{\sigma\leq t\}} \subseteq \mathcal{F}_t^{\nu_1+\delta_1}.$$

<u>I.S.:</u> Es gelte für ein festes $i \in \{1, ..., n-2\}$ die Eigenschaft (4.5).
Ersetzt man in (4.6) die Menge $\{\tau_1 + \delta_1 \leq s\}$ durch $\{\tau_{i+1} + \delta_{i+1} \leq s\}$, so erhält man analog für alle $s, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $s \leq t$

$$A \cap \{\sigma \leq t\} \cap \{\tau_{i+1} + \delta_{i+1} \leq s\} \in \sigma(\mathcal{F}_t,\, \mathcal{G}_t^{\nu_{i+1}+\delta_{i+1}}).$$

Daraus folgt zusammen mit (4.5) für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\sigma(\mathcal{F}_t^{\tau_1+\delta_1,...,\tau_i+\delta_i}, \mathcal{G}_t^{\tau_{i+1}+\delta_{i+1}}) \mid_{A\cap\{\sigma\leq t\}} \subseteq \mathcal{F}_t^{\nu_1+\delta_1,...,\nu_{i+1}+\delta_{i+1}},$$

also für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\mathcal{F}_t^{\tau_1+\delta_1,...,\tau_{i+1}+\delta_{i+1}} \mid_{A\cap\{\sigma\leq t\}} \subseteq \mathcal{F}_t^{\nu_1+\delta_1,...,\nu_{i+1}+\delta_{i+1}}.$$

Sei $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Aufgrund der Symmetrie von $(\nu_1, ..., \nu_n)$ resultiert aus der eben bewiesenen Aussage (4.5)

$$\mathcal{F}_t^{\rho_1+\delta_1,...,\rho_i+\delta_i} \mid_{A^c\cap\{\sigma\leq t\}} \subseteq \mathcal{F}_t^{\nu_1+\delta_1,...,\nu_i+\delta_i}$$

für alle $i \in \{1, ..., n-1\}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\{\nu_i + \delta_i \leq t\} &= \Big(A \cap \{\tau_i + \delta_i \leq t\}\Big) \cup \Big(A^c \cap \{\rho_i + \delta_i \leq t\}\Big) \\
&= \Big(A \cap \{\sigma \leq t\} \cap \{\tau_i + \delta_i \leq t\}\Big) \cup \Big(A^c \cap \{\sigma \leq t\} \cap \{\rho_i + \delta_i \leq t\}\Big) \\
&\in \sigma\Big(\mathcal{F}_t^{\tau_1+\delta_1,...,\tau_{i-1}+\delta_{i-1}} \mid_{A\cap\{\sigma\leq t\}},\, \mathcal{F}_t^{\rho_1+\delta_1,...,\rho_{i-1}+\delta_{i-1}} \mid_{A^c\cap\{\sigma\leq t\}}\Big) \\
&\subseteq \mathcal{F}_t^{\nu_1+\delta_1,...,\nu_{i-1}+\delta_{i-1}}
\end{aligned}$$

für alle $i \in \{2, ..., n\}$. Somit ist $(\nu_1, ..., \nu_n)$ in $\mathcal{S}_\sigma^n(\delta)$ enthalten und es gilt

$$E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\nu_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) = \max\Big\{E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big),\ E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\rho_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big)\Big\}.$$

Sind Bild(τ_1) und Bild(ρ_1) abzählbar, so auch Bild(ν_1). Also ist in diesem Fall $(\nu_1, ..., \nu_n)$ in $\mathcal{S}_\sigma^n(\delta)_{\text{disk}}$ enthalten, woraus der zweite Teil obiger Aussage resultiert. □

Lemma 4.11. *Seien σ und τ $\mathfrak{F}$-Stoppzeiten. Mit der Bezeichnung $L\delta := (\delta_2, ..., \delta_{n-1})$ gilt:*

(i) $\mathcal{S}^n_\sigma(\delta, \mathfrak{F}) = \Big\{(\tau_1, ..., \tau_n);\ \tau_1 \in \mathcal{S}_\sigma,\ (\tau_2, ..., \tau_n) \in \mathcal{S}^{n-1}_{\delta_1+\tau_1}(L\delta, \mathfrak{F}^{\tau_1+\delta_1})\Big\}$ *und*
$\mathcal{S}^n_\sigma(\delta, \mathfrak{F})_{\mathrm{disk}} = \Big\{(\tau_1, ..., \tau_n);\ \tau_1 \in \mathcal{S}_{\sigma,\mathrm{disk}},\ (\tau_2, ..., \tau_n) \in \mathcal{S}^{n-1}_{\delta_1+\tau_1}(L\delta, \mathfrak{F}^{\tau_1+\delta_1})\Big\}$, *wobei*
$\mathcal{S}_{\sigma,\mathrm{disk}} := \{\rho \in \mathcal{S}_\sigma;\ \mathrm{Bild}(\rho) \text{ ist abzählbar}\}$.

(ii) *Für alle* $(\tau_2, ..., \tau_n) \in \mathcal{S}^{n-1}_{\tau+\delta_1}(L\delta, \mathfrak{F}^{\tau+\delta_1})$ *und* $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ *ist*

$$\Big(\tau_2 1_{\{\tau=\lambda\}} + (\lambda + \delta_1)1_{\{\tau\neq\lambda\}}, ..., \tau_n 1_{\{\tau=\lambda\}} + (\lambda + \delta_1 + ... + \delta_{n-1})1_{\{\tau\neq\lambda\}}\Big)$$

in $\mathcal{S}^{n-1}_{\lambda+\delta_1}(L\delta, \mathfrak{F}^{\lambda+\delta_1})$ *enthalten.*

(iii) *Für alle* $(\tau_2, ..., \tau_n) \in \mathcal{S}^{n-1}_{\lambda+\delta_1}(L\delta, \mathfrak{F}^{\lambda+\delta_1})$ *ist*

$$\Big(\tau_2 1_{\{\tau=\lambda\}} + (\tau + \delta_1)1_{\{\tau\neq\lambda\}}, ..., \tau_n 1_{\{\tau=\lambda\}} + (\tau + \delta_1 + ... + \delta_{n-1})1_{\{\tau\neq\lambda\}}\Big)$$

in $\mathcal{S}^{n-1}_{\tau+\delta_1}(L\delta, \mathfrak{F}^{\tau+\delta_1})$ *enthalten.*

(iv) *Für alle* $(\tau_2, ..., \tau_n) \in \mathcal{S}^{n-1}_{\tau+\delta_1}(L\delta, \mathfrak{F}^{\tau+\delta_1})$ *und* $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ *ist*

$$(\tau_2 + c, ..., \tau_n + c)$$

in $\mathcal{S}^{n-1}_{\tau+c+\delta_1}(L\delta, \mathfrak{F}^{\tau+c+\delta_1})$ *enthalten.*

Beweis. Zu (i): Die erste Aussage resultiert direkt aus der Definition 4.8.(i).

Zu (ii): Sei $(\tau_2, ..., \tau_n) \in \mathcal{S}^{n-1}_{\tau+\delta_1}(L\delta, \mathfrak{F}^{\tau+\delta_1})$ und sei $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Definiere

$$(\rho_2, ..., \rho_n) := \Big(\tau_2 1_{\{\tau=\lambda\}} + (\lambda + \delta_1)1_{\{\tau\neq\lambda\}}, ..., \tau_n 1_{\{\tau=\lambda\}} + (\lambda + \delta_1 + ... + \delta_{n-1})1_{\{\tau\neq\lambda\}}\Big).$$

Es gilt für alle $t < \lambda$ und $i \in \{2, ..., n\}$

$$\{\rho_i \leq t\} = \emptyset.$$

Wendet man Satz 4.7.(iii) rekursiv an, erhält man für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $i \in \{3, ..., n\}$

$$\mathcal{F}_t^{\tau+\delta_1, \tau_2+\delta_2, ..., \tau_{i-1}+\delta_{i-1}} |_{\{\tau=\lambda\}} = \mathcal{F}_t^{\lambda+\delta_1, \tau_2+\delta_2, ..., \tau_{i-1}+\delta_{i-1}} |_{\{\tau=\lambda\}}$$

und zusammen mit $\{\tau = \lambda\} \subseteq \bigcap_{j=2}^{n} \{\tau_j = \rho_j\}$

$$\mathcal{F}_t^{\lambda+\delta_1, \tau_2+\delta_2, ..., \tau_{i-1}+\delta_{i-1}} |_{\{\tau=\lambda\}} = \mathcal{F}_t^{\lambda+\delta_1, \rho_2+\delta_2, ..., \rho_{i-1}+\delta_{i-1}} |_{\{\tau=\lambda\}} .$$

Daraus folgt für alle $t \geq \lambda$ und $i \in \{3, ..., n\}$

$$\begin{aligned}
\{\rho_i \leq t\} &= \{\tau_i \, 1_{\{\tau=\lambda\}} + (\lambda + \delta_1 + ... + \delta_{i-1}) \, 1_{\{\tau\neq\lambda\}} \leq t\} \\
&= \big(\{\tau = \lambda\} \cap \{\tau_i \leq t\}\big) \cup \big(\{\tau \neq \lambda\} \cap \{\lambda + \delta_1 + ... + \delta_{i-1} \leq t\}\big) \\
&= \big(\{\tau = \lambda\} \cap \{\tau_i \leq t\}\big) \cup \big(\{\tau \neq \lambda\} \cap \{\rho_{i-1} + \delta_{i-1} \leq t\}\big) \\
&\in \sigma\Big(\mathcal{F}_t^{\tau+\delta_1,\tau_2+\delta_2,...,\tau_{i-1}+\delta_{i-1}} \,|_{\{\tau=\lambda\}}, \, \mathcal{F}_t^{\rho_{i-1}+\delta_{i-1}} \,|_{\{\tau\neq\lambda\}} \Big) \\
&= \sigma\Big(\mathcal{F}_t^{\lambda+\delta_1,\tau_2+\delta_2,...,\tau_{i-1}+\delta_{i-1}} \,|_{\{\tau=\lambda\}}, \, \mathcal{F}_t^{\rho_{i-1}+\delta_{i-1}} \,|_{\{\tau\neq\lambda\}} \Big) \\
&= \sigma\Big(\mathcal{F}_t^{\lambda+\delta_1,\rho_2+\delta_2,...,\rho_{i-1}+\delta_{i-1}} \,|_{\{\tau=\lambda\}}, \, \mathcal{F}_t^{\rho_{i-1}+\delta_{i-1}} \,|_{\{\tau\neq\lambda\}} \Big) \\
&\subseteq \sigma\Big(\mathcal{F}_\lambda, \mathcal{F}_t^{\lambda+\delta_1,\rho_2+\delta_2,...,\rho_{i-1}+\delta_{i-1}}, \mathcal{F}_t^{\rho_{i-1}+\delta_{i-1}}\Big) \\
&= \mathcal{F}_t^{\lambda+\delta_1,\rho_2+\delta_2,...,\rho_{i-1}+\delta_{i-1}}.
\end{aligned}$$

Also ist ρ_i eine $\mathfrak{F}^{\lambda+\delta_1,\rho_2+\delta_2,...,\rho_{i-1}+\delta_{i-1}}$-Stoppzeit mit $\rho_{i-1} + \delta_{i-1} \leq \rho_i$ für alle $i \in \{3, ..., n\}$. Analog erhält man erneut mit 4.7.(iii) für alle $t \geq \lambda$

$$\begin{aligned}
\{\rho_2 \leq t\} &= \big(\{\tau = \lambda\} \cap \{\tau_1 \leq t\}\big) \cup \big(\{\tau \neq \lambda\} \cap \{\lambda + \delta_1 \leq t\}\big) \\
&\in \sigma\Big(\mathcal{F}_t^{\tau+\delta_1} \,|_{\{\tau=\lambda\}}, \, \mathcal{F}_t^{\lambda+\delta_1} \,|_{\{\tau\neq\lambda\}} \Big) \\
&= \sigma\Big(\mathcal{F}_t^{\lambda+\delta_1} \,|_{\{\tau=\lambda\}}, \, \mathcal{F}_t^{\lambda+\delta_1} \,|_{\{\tau\neq\lambda\}} \Big) \\
&\subseteq \sigma\Big(\mathcal{F}_\lambda, \mathcal{F}_t^{\lambda+\delta_1}\Big) \\
&= \mathcal{F}_t^{\lambda+\delta_1}.
\end{aligned}$$

Also ist ρ_2 eine $\mathfrak{F}^{\lambda+\delta_1}$-Stoppzeit mit $\lambda + \delta_1 \leq \rho_2$.

Zu (iii): Die Aussage (iii) erhält man, indem man den Beweis von (ii) auf $\Big(\tau_2 1_{\{\tau=\lambda\}} + (\tau + \delta_1) 1_{\{\tau\neq\lambda\}}, ..., \tau_n 1_{\{\tau=\lambda\}} + (\tau + \delta_1 + ... + \delta_{n-1}) 1_{\{\tau\neq\lambda\}}\Big)$ anwendet.

Zu (iv): Sei $(\tau_2, ..., \tau_n) \in \mathcal{S}_{\tau+\delta_1}^{n-1}(L\delta, \mathfrak{F}^{\tau+\delta_1})$ und seien $c, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $c \leq t$. Es wird zunächst für alle $i \in \{2, ..., n\}$ die Inklusion

$$\mathcal{F}_{t-c}^{\tau+\delta_1,\tau_2+\delta_2,...,\tau_i+\delta_i} \subseteq \mathcal{F}_t^{\tau+c+\delta_1,\tau_2+c+\delta_2,...,\tau_i+c+\delta_i} \tag{4.7}$$

durch Induktion über i bewiesen, wobei der I.A. direkt aus Satz 4.7.(ii) resultiert. Ist für ein $i \in \{2, ..., n-1\}$ die Inklusion (4.7) für dieses i erfüllt, so erhält man zusammen mit Satz 4.7.(ii)

$$\begin{aligned}
\sigma\Big(\mathcal{F}_{t-c}^{\tau+\delta_1,\tau_2+\delta_2,...,\tau_i+\delta_i}, \mathcal{G}_{t-c}^{\tau_{i+1}+\delta_{i+1}}\Big) &\subseteq \sigma\Big(\mathcal{F}_t^{\tau+c+\delta_1,\tau_2+c+\delta_2,...,\tau_i+c+\delta_i}, \mathcal{G}_{t-c}^{\tau_{i+1}+\delta_{i+1}}\Big) \\
&= \sigma\Big(\mathcal{F}_t^{\tau+c+\delta_1,\tau_2+c+\delta_2,...,\tau_i+c+\delta_i}, \mathcal{G}_t^{\tau_{i+1}+c+\delta_{i+1}}\Big),
\end{aligned}$$

also

$$\mathcal{F}_{t-c}^{\tau+\delta_1,\tau_2+\delta_2,...,\tau_{i+1}+\delta_{i+1}} \subseteq \mathcal{F}_t^{\tau+c+\delta_1,\tau_2+c+\delta_2,...,\tau_{i+1}+c+\delta_{i+1}}.$$

Aus der eben bewiesenen Aussage (4.7) folgt für alle $i \in \{2, ..., n\}$

$$\{\tau_i + c \leq t\} = \{\tau_i \leq t - c\} \in \mathcal{F}_{t-c}^{\tau+\delta_1,\tau_2+\delta_2,...,\tau_{i-1}+\delta_{i-1}} \subseteq \mathcal{F}_t^{\tau+c+\delta_1,\tau_2+c+\delta_2,...,\tau_{i-1}+c+\delta_{i-1}}.$$

Also ist $\tau_i + c$ eine $\mathfrak{F}^{\tau+c+\delta_1,\tau_2+c+\delta_2,...,\tau_{i-1}+c+\delta_{i-1}}$-Stoppzeit, woraus zusammen mit $\tau + c + \delta_1 \leq \tau_2 + c$ und $\tau_{i-1} + c + \delta_{i-1} \leq \tau_i + c$ für alle $i \in \{3, ..., n\}$ die letzte Aussage resultiert. □

Die in Satz 1.2 definierte Menge $\mathcal{S}_\sigma^n$ ist nach Lemma 3.8.(ii) gegen komponentenweise Maximumsbildung abgeschlossen. Diese Eigenschaft erfüllt nach der folgenden Bemerkung nicht die Menge $\mathcal{S}_\sigma^n(\delta, \mathfrak{F})$.

Bemerkung 4.12. *(i) Es seien ρ_1 und τ_1 $\mathfrak{F}$-Stoppzeiten mit $\rho_1 \geq \tau_1$. Weiter sei τ_2 eine $\mathfrak{F}^{\tau_1+\delta_1}$-Stoppzeit und ρ_2 eine $\mathfrak{F}^{\rho_1+\delta_1}$-Stoppzeit mit $\rho_2 \leq \tau_2$. Ist τ_2 keine $\mathfrak{F}^{\rho_1+\delta_1}$-Stoppzeit, so ist auch $\rho_2 \vee \tau_2 = \tau_2$ keine $\mathfrak{F}^{(\rho_1 \vee \tau_1)+\delta_1} = \mathfrak{F}^{\rho_1+\delta_1}$-Stoppzeit.*

(ii) Es seien $\delta_1, ..., \delta_{n-1}$ $\mathfrak{F}$-Stoppzeiten. Dann ist $\mathcal{S}_\sigma^n(\delta)$ für alle $\sigma \in \mathcal{S}$ komponentenweise gegen Maximums- und Minimumsbildung abgeschlossen.

Beweis. Die zweite Aussage resultiert unmittelbar aus 4.9.(i). □

4.3 Mehrfaches Stoppen mit zufälligen Wartezeiten

Überträgt man das Optimierungsproblem (1.6) auf das Modell 4.1, erhält man

Definition 4.13. Für jede $\mathfrak{F}$-Stoppzeit σ sei

$$Z_n(\sigma) := Z_n^{\delta,\mathfrak{F}}(\sigma) := \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_\sigma^n(\delta,\mathfrak{F})} E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \tag{4.8}$$

und

$$Z_n(\sigma)_{\text{disk}} := Z_n^{\delta,\mathfrak{F}}(\sigma)_{\text{disk}} := \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_\sigma^n(\delta,\mathfrak{F})_{\text{disk}}} E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big). \tag{4.9}$$

Weiter sei $Z_0(\sigma) :\equiv Z_0(\sigma)_{\text{disk}} :\equiv 0$ für jede $\mathfrak{F}$-Stoppzeit σ.

Einen Zusammenhang zwischen $Z_n(\sigma)$ und $Z_n(\sigma)_{\text{disk}}$ beinhaltet

Satz 4.14. *Für jede $\mathfrak{F}$-Stoppzeit σ gilt:*

(i) $Z_n(\sigma)_{\text{disk}} \leq Z_n(\sigma)$.

(ii) Sind $\delta_1, ..., \delta_{n-1}$ $\mathfrak{F}$-Stoppzeiten, so ist auch die umgekehrte Ungleichung aus (i) gültig.

Beweis. Zu (i): Die Ungleichung resultiert sofort aus $\mathcal{S}_\sigma^n(\delta,\mathfrak{F})_{\text{disk}} \subseteq \mathcal{S}_\sigma^n(\delta,\mathfrak{F})$.

Zu (ii): Seien $\delta_1,...,\delta_{n-1}$ $\mathfrak{F}$-Stoppzeiten und sei $\tau \in \mathcal{S}_\sigma^n(\delta,\mathfrak{F})$. Es existiert eine Folge von $\mathfrak{F}$-Stoppzeiten $(\tau_k^1)_{k\in\mathbb{N}}$ mit abzählbarem Wertebereich und $\tau_k^1 \downarrow \tau_1$ für $k \to \infty$. Definiere für alle $k \in \mathbb{N}$ rekursiv

$$\tilde{\tau}_k^1 := \tau_k^1 \quad \text{und} \quad \tilde{\tau}_k^{i+1} = \max\{\tilde{\tau}_k^i + \delta_i, \tau_{i+1}\}. \tag{4.10}$$

Dann ist nach 4.9.(i) $(\tilde{\tau}_k^1,...,\tilde{\tau}_k^n)$ in $\mathcal{S}_\sigma^n(\delta)_{\text{disk}}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ enthalten und $(\tilde{\tau}_k^i)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert $\mathcal{P}$-fast sicher gegen τ_i für alle $i \in \mathbb{N}_{\leq n}$. Daraus folgt

$$E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) = \lim_{k\to\infty} E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tilde{\tau}_k^i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\rho\in\mathcal{S}_\sigma^n(\delta)_{\text{disk}}} E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\rho_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \leq Z_n(\sigma)_{\text{disk}}.$$

□

Anmerkung. Sind $\delta_1,...,\delta_{n-1}$ keine $\mathfrak{F}$-Stoppzeiten, so ist die in (4.10) definierte Familie $(\tilde{\tau}_k^i)_{i\in\mathbb{N}_{\leq n}}$ im Allgemeinen nicht in $\mathcal{S}_\sigma^n(\delta,\mathfrak{F})_{\text{disk}}$ enthalten und somit die Ungleichung

$$E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tilde{\tau}_k^i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\rho\in\mathcal{S}_\sigma^n(\delta)_{\text{disk}}} E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\rho_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big)$$

nicht gültig.

Sei $\sigma \in \mathcal{S}$. Nach Lemma 4.10 sind die Mengen

$$\{E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big);\ \tau \in \mathcal{S}_\sigma^n(\delta)\} \quad \text{und} \quad \{E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big);\ \tau \in \mathcal{S}_\sigma^n(\delta)_{\text{disk}}\}$$

nach oben gerichtet. Also existieren nach G. Peskir und A. Shiryaev [27, Lemma 1.3] $(\tau^k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{S}_\sigma^n(\delta))^{\mathbb{N}}$ und $(\tilde{\tau}^k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{S}_\sigma^n(\delta)_{\text{disk}})^{\mathbb{N}}$ mit

$$Z_n^{\delta,\mathfrak{F}}(\sigma) = \lim_{k\to\infty} \uparrow E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i^k)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \quad \text{und} \quad Z_n^{\delta,\mathfrak{F}}(\sigma)_{\text{disk}} = \lim_{k\to\infty} \uparrow E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tilde{\tau}_i^k)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big).$$

Mit Hilfe dieser Approximationen kann man den Beweis des Satzes 3.10 direkt auf $Z_n^{\delta,\mathfrak{F}}(\sigma)$ und $Z_n^{\delta,\mathfrak{F}}(\sigma)_{\text{disk}}$ übertragen:

Satz 4.15. *Für jede $\mathfrak{F}$-Stoppzeit σ gilt*

$$Z_n^{\delta,\mathfrak{F}}(\sigma) = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_\sigma} E\Big(Y(\tau) + E\big(Z_{n-1}^{L\delta,\mathfrak{F}^{\tau+\delta_1}}(\tau+\delta_1)|\mathcal{F}_\tau\big)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \tag{4.11}$$

und

$$Z_n^{\delta,\mathcal{F}}(\sigma)_{\text{disk}} = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_{\sigma,\text{disk}}} E\Big(Y(\tau) + E\big(Z_{n-1}^{L\delta,\mathcal{F}^{\tau+\delta_1}}(\tau+\delta_1)|\mathcal{F}_\tau\big)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big). \tag{4.12}$$

□

Um 1.10.(i) für die Abbildung $t \mapsto E\big(Z_{n-1}^{L\delta,\mathfrak{F}^{t+\delta_1}}(t+\delta_1)|\mathcal{F}_t\big)$ zu formulieren, benötigt man

Lemma 4.16. *Es gilt für jede $\mathfrak{F}$-Stoppzeit τ und alle $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$*

$$1_{\{\tau=\lambda\}}\, Z_{n-1}^{L\delta,\mathfrak{F}^{\tau+\delta_1}}(\tau+\delta_1) = 1_{\{\tau=\lambda\}}\, Z_{n-1}^{L\delta,\mathfrak{F}^{\lambda+\delta_1}}(\lambda+\delta_1).$$

Beweis. $\underline{\text{"}\leq\text{"}}$: Sei $(\tau_2,...,\tau_n) \in \mathcal{S}_{\tau+\delta_1}^{n-1}(L\delta,\mathfrak{F}^{\tau+\delta_1})$. Nach Lemma 4.11.(ii) ist

$$(\rho_2,...,\rho_n) := \Big(\tau_2 1_{\{\tau=\lambda\}} + (\lambda+\delta_1)1_{\{\tau\neq\lambda\}}, ..., \tau_n 1_{\{\tau=\lambda\}} + (\lambda+\delta_1+...+\delta_{n-1})1_{\{\tau\neq\lambda\}}\Big)$$

in $\mathcal{S}_{\lambda+\delta_1}^{n-1}(L\delta,\mathfrak{F}^{\lambda+\delta_1})$ enthalten. Daraus folgt zusammen mit 4.7.(iii)

$$\begin{aligned}
1_{\{\tau=\lambda\}}\, E\Big(\sum_{i=2}^{n} Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_{\tau+\delta_1}^{\tau+\delta_1}\Big) &= E\Big(\sum_{i=2}^{n} 1_{\{\tau=\lambda\}}\, Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_{\tau+\delta_1}^{\tau+\delta_1}\ |_{\{\tau=\lambda\}}\Big)\\
&= E\Big(\sum_{i=2}^{n} 1_{\{\tau=\lambda\}}\, Y(\rho_i)\Big|\mathcal{F}_{\lambda+\delta_1}^{\lambda+\delta_1}\ |_{\{\tau=\lambda\}}\Big)\\
&= 1_{\{\tau=\lambda\}}\, E\Big(\sum_{i=2}^{n} Y(\rho_i)\Big|\mathcal{F}_{\lambda+\delta_1}^{\lambda+\delta_1}\Big)\\
&\leq 1_{\{\tau=\lambda\}}\, Z_{n-1}^{L\delta,\mathfrak{F}^{\lambda+\delta_1}}(\lambda+\delta_1).
\end{aligned}$$

$\underline{\text{"}\geq\text{"}}$: Die umgekehrte Ungleichung erhält man analog mit Lemma 4.11.(iii). □

Definition und Lemma 4.17. *Es wird durch*

$$\overline{Z}_{n-1}^{\delta}(t) := E\big(Z_{n-1}^{L\delta,\mathfrak{F}^{t+\delta_1}}(t+\delta_1)|\mathcal{F}_t\big) \tag{4.13}$$

ein Supermartingal $\overline{Z}_{n-1}^{\delta}$ mit den folgenden Eigenschaften definiert:

(i) $\overline{Z}_{n-1}^{\delta}$ besitzt eine rechtsseitig-stetige Modifikation $\overline{Z}_{n-1}^{\delta,r}$.

(ii) Für jede $\mathfrak{F}$-Stoppzeit τ mit abzählbarem Wertebereich gilt

$$\overline{Z}_{n-1}^{\delta,r}(\tau) = \overline{Z}_{n-1}^{\delta}(\tau) = E\big(Z_{n-1}^{L\delta,\mathfrak{F}^{\tau+\delta_1}}(\tau+\delta_1)|\mathcal{F}_\tau\big). \tag{4.14}$$

Beweis. Seien $s,t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $s \leq t$. Nach Satz 4.7.(iv) gilt für alle $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\mathcal{F}_r^{t+\delta} \subseteq \mathcal{F}_r^{s+\delta},$$

also

$$\begin{aligned}
E(\overline{Z}_{n-1}^{\delta}(t)|\mathcal{F}_s) &= E(Z_{n-1}^{L\delta,\mathfrak{F}^{t+\delta_1}}(t+\delta_1)|\mathcal{F}_s)\\
&\leq E(Z_{n-1}^{L\delta,\mathfrak{F}^{s+\delta_1}}(t+\delta_1)|\mathcal{F}_s)\\
&= E\Big(E\Big[Z_{n-1}^{L\delta,\mathfrak{F}^{s+\delta_1}}(t+\delta_1)\Big|\mathcal{F}_{s+\delta_1}^{s+\delta_1}\Big]\Big|\mathcal{F}_s\Big)\\
&= E\Big(E\Big[\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_{t+\delta_1}^{n-1}(L\delta,\mathfrak{F}^{s+\delta_1})} E\Big(\sum_{i=1}^{n-1} Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_{t+\delta_1}^{s+\delta_1}\Big)\Big|\mathcal{F}_{s+\delta_1}^{s+\delta_1}\Big]\Big|\mathcal{F}_s\Big).
\end{aligned}$$

Da nach Lemma 4.10 die Menge $\left\{E\Big(\sum_{i=1}^{n-1} Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}^{s+\delta_1}_{t+\delta_1}\Big);\ \tau\in\mathcal{S}^{n-1}_{t+\delta_1}(L\delta,\mathfrak{F}^{s+\delta_1})\right\}$ nach oben gerichtet ist, folgt daraus

$$
\begin{aligned}
E(\overline{Z}^{\delta}_{n-1}(t)|\mathcal{F}_s) &\le E\Big(\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}^{n-1}_{t+\delta_1}(L\delta,\mathfrak{F}^{s+\delta_1})} E\Big(\sum_{i=1}^{n-1} Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}^{s+\delta_1}_{s+\delta_1}\Big)\Big|\mathcal{F}_s\Big)\\
&\le E\Big(\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}^{n-1}_{s+\delta_1}(L\delta,\mathfrak{F}^{s+\delta_1})} E\Big(\sum_{i=1}^{n-1} Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}^{s+\delta_1}_{s+\delta_1}\Big)\Big|\mathcal{F}_s\Big)\\
&= \overline{Z}^{\delta}_{n-1}(s).
\end{aligned}
$$

Zu (i): Sei $t\in\mathbb{R}_{\ge 0}$ und $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge, die gegen t konvergiert. Da $\overline{Z}^{\delta}_{n-1}$ ein Supermartingal ist, existiert $\lim_{k\to\infty} E\Big(\overline{Z}^{\delta}_{n-1}(t_k)\Big)$ und ist durch $E\Big(\overline{Z}^{\delta}_{n-1}(t)\Big)$ nach oben beschränkt. Für $(\tau_2,...,\tau_n)\in\mathcal{S}^{n-1}_{t+\delta_1}(L\delta,\mathfrak{F}^{t+\delta_1})$ definiere für alle $k\in\mathbb{N}$

$$\Delta_k := t_k - t \quad \text{und} \quad \tau^k := \ (\tau_2+\Delta_k,...,\tau_n+\Delta_k).$$

Dann ist nach Lemma 4.11.(iv) τ_k für alle $k\in\mathbb{N}$ in $\mathcal{S}^{n-1}_{t+\Delta_k+\delta_1}(L\delta,\mathfrak{F}^{t+\Delta_k+\delta_1}) = \mathcal{S}^{n-1}_{t_k+\delta_1}(L\delta,\mathfrak{F}^{t_k+\delta_1})$ enthalten, woraus die Ungleichung

$$E\sum_{i=2}^{n} Y(\tau_i) = \lim_{k\to\infty} E\sum_{i=2}^{n} Y(\tau_i^k) \le \lim_{k\to\infty} E\Big(Z^{L\delta,\mathfrak{F}^{t_k+\delta_1}}_{n-1}(t_k+\delta_1)\Big) = \lim_{k\to\infty} E\Big(\overline{Z}^{\delta}_{n-1}(t_k)\Big)$$

resultiert. Also konvergiert $\Big(E\Big(\overline{Z}^{\delta}_{n-1}(t_k)\Big)\Big)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $E\Big(\overline{Z}^{\delta}_{n-1}(t)\Big)$.

Zu (ii): Sei τ eine $\mathfrak{F}$-Stoppzeit mit abzählbarem Wertebereich und sei $\lambda\in\mathbb{R}_{\ge 0}$. Es gilt nach Lemma 4.16

$$
\begin{aligned}
1_{\{\tau=\lambda\}}\,\overline{Z}^{\delta}_{n-1}(\tau) &= 1_{\{\tau=\lambda\}}\,\overline{Z}^{\delta}_{n-1}(\lambda)\\
&= 1_{\{\tau=\lambda\}}\,E\big(Z^{L\delta,\mathfrak{F}^{\lambda+\delta_1}}_{n-1}(\lambda+\delta_1)|\mathcal{F}_\lambda\big)\\
&= E\big(1_{\{\tau=\lambda\}}\,Z^{L\delta,\mathfrak{F}^{\lambda+\delta_1}}_{n-1}(\lambda+\delta_1)|\mathcal{F}_\lambda\,|_{\{\tau=\lambda\}}\,\big)\\
&= E\big(1_{\{\tau=\lambda\}}\,Z^{L\delta,\mathfrak{F}^{\tau+\delta_1}}_{n-1}(\tau+\delta_1)|\mathcal{F}_\tau\,|_{\{\tau=\lambda\}}\,\big)\\
&= 1_{\{\tau=\lambda\}}\,E\big(Z^{L\delta,\mathfrak{F}^{\tau+\delta_1}}_{n-1}(\tau+\delta_1)|\mathcal{F}_\tau\big).
\end{aligned}
$$

Daraus resultiert zusammen mit dem abzählbaren Wertebereich von τ die Eigenschaft (4.14). □

Satz 4.18. *$Y_n := Y + \overline{Z}^{\delta,r}_{n-1}$ ist ein $\mathfrak{F}$-adaptierter und rechtsseitig-stetiger Prozess mit*

$$Z^{\delta,\mathfrak{F}}_n(\sigma)_{\mathrm{disk}} = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_\sigma} E(Y_n(\tau)|\mathcal{F}_\sigma) \tag{4.15}$$

für alle $\sigma\in\mathcal{S}$. Sind $\delta_1,...,\delta_{n-1}$ zusätzlich $\mathcal{F}$-Stoppzeiten, so gilt ebenfalls

$$Z^{\delta,\mathfrak{F}}_n(\sigma) = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_\sigma} E(Y_n(\tau)|\mathcal{F}_\sigma) \tag{4.16}$$

für alle $\sigma\in\mathcal{S}$.

Beweis. Es gilt nach (4.12), (4.14) und Lemma 1.6.(ii) für alle $\sigma \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned} Z_n^{\delta,\mathfrak{F}}(\sigma)_{\text{disk}} &= \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_{\sigma,\text{disk}}} E\Big(Y(\tau) + E\big(Z_{n-1}^{L\delta,\mathcal{F}^{\tau+\delta_1}}(\tau+\delta_1)|\mathcal{F}_\tau\big)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_{\sigma,\text{disk}}} E\Big(Y(\tau) + \overline{Z}_{n-1}^{\delta,r}(\tau)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_{\sigma,\text{disk}}} E(Y_n(\tau)\Big|\mathcal{F}_\sigma) \\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_\sigma} E(Y_n(\tau)\Big|\mathcal{F}_\sigma). \end{aligned}$$

Die Gleichung (4.16) resultiert unmittelbar aus Satz 4.14. □

Wendet man den Beweis von Folgerung 1.22.(i) auf $\overline{Z}_{n-1}^{\delta,r}$ an, so erhält man

Folgerung 4.19. *Sind $\delta_1, ..., \delta_{n-1}$ $\mathfrak{F}$-Stoppzeiten, so gilt*

$$\overline{Z}_{n-1}^{\delta,r}(\tau) = E\big(Z_{n-1}^{L\delta}(\tau+\delta_1)|\mathcal{F}_\tau\big)$$

für jede $\mathfrak{F}$-Stoppzeit τ. □

4.4 Mehrfaches Stoppen mit zufälligen Wartezeiten im diskreten Fall

In diesem Abschnitt wird das Beispiel 1.5 auf ein mehrfaches Optimierungsproblem mit zufälligen Wartezeiten übertragen. Dafür gelte

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{\lfloor t \rfloor}, \quad Y(t) = Y(\lfloor t \rfloor) \quad \text{und} \quad \text{Bild}(\delta_1), ..., \text{Bild}(\delta_{n-1}) \subseteq \mathbb{N}_0$$

für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Definiere für jede $(\mathcal{F}_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$-Stoppzeit σ

$$\mathcal{T}_\sigma^n(\delta, \mathfrak{F}) := \Big\{(\tau_1, ..., \tau_n) \in \mathcal{S}_\sigma^n(\delta, \mathfrak{F});\ \text{Bild}(\tau_1), ..., \text{Bild}(\tau_n) \subseteq \mathbb{N}_0\Big\}.$$

Als Vorbereitung dient

Lemma 4.20. *Es gilt für jede $(\mathcal{F}_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$-Stoppzeit σ:*

(i) $\mathcal{T}_\sigma^n(\delta, \mathfrak{F}) \subseteq \mathcal{S}_\sigma^n(\delta, \mathfrak{F})_{\text{disk}}$.

(ii) $\mathcal{F}_t^{\rho_1,...,\rho_i} = \mathcal{F}_{\lfloor t \rfloor}^{\rho_1,...,\rho_i}$ *für alle* $\rho_1, ..., \rho_n : \Omega \to \mathbb{N}_0$, $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ *und* $i \in \mathbb{N}_{\leq n}$.

(iii) $\mathcal{F}_t^{\tau_1+\delta_1,...,\tau_i+\delta_i} \subseteq \mathcal{F}_t^{\lfloor \tau_1 \rfloor+\delta_1,...,\lfloor \tau_i \rfloor+\delta_i}$ *und* $\lfloor \tau_i \rfloor$ *ist eine* $\mathfrak{F}^{\lfloor \tau_1 \rfloor+\delta_1,...,\lfloor \tau_{i-1} \rfloor+\delta_{i-1}}$*-Stoppzeit für alle* $\tau \in \mathcal{S}_\sigma^n(\delta, \mathfrak{F})$, $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ *und* $i \in \mathbb{N}_{\leq n}$.

(iv) $(\lfloor\tau_1\rfloor, ..., \lfloor\tau_n\rfloor) \in \mathcal{T}^n_\sigma(\delta, \mathfrak{F})$ *für alle* $\tau \in \mathcal{S}^n_\sigma(\delta, \mathfrak{F})$.

Beweis. Zu (i): Die erste Aussage folgt direkt aus den Definitionen von $\mathcal{T}^n_\sigma(\delta, \mathfrak{F})$ und $\mathcal{S}^n_\sigma(\delta, \mathfrak{F})_{\text{disk}}$.

Zu (ii): Es gilt für alle $\rho : \Omega \to \mathbb{N}_0$ und $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\mathcal{G}^\rho_t = \sigma\Big(\{\{\rho \leq s\};\ s \leq t\}\Big) = \sigma\Big(\{\{\rho \leq s\};\ s \leq \lfloor t\rfloor\}\Big) = \mathcal{G}^\rho_{\lfloor t\rfloor}.$$

Daraus erhält man zusammen mit $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{\lfloor t\rfloor}$ iterativ die zweite Aussage.

Zu (iii): (Beweis durch Induktion über i.) Seien $\rho_1, ..., \rho_n : \Omega \to \mathbb{N}_0$ und sei $\tau \in \mathcal{S}^n_\sigma(\delta, \mathfrak{F})$.

I.A.: Da $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{\lfloor t\rfloor}$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, ist $\lfloor\tau_1\rfloor$ eine $\mathfrak{F}$-Stoppzeit. Weiter existiert eine Folge von $\mathfrak{F}$-Stoppzeiten $(\tau_1^k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit abzählbarem Wertebereich und $\tau_1^k \downarrow \tau_1$ für $k \to \infty$. Für diese gilt nach 4.6 und 4.7.(iv)

$$\{\tau_1 + \delta_1 < s\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{\tau_1^k + \delta_1 < s\} \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_s^{\tau_1^k+\delta_1} \subseteq \mathcal{F}_s^{\lfloor\tau_1\rfloor+\delta_1} \subseteq \mathcal{F}_t^{\lfloor\tau_1\rfloor+\delta_1}$$

für alle $s, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $s \leq t$. Daraus folgt erneut mit Satz 4.6 die Inklusion $\mathcal{F}_t^{\tau_1+\delta_1} \subseteq \mathcal{F}_t^{\lfloor\tau_1\rfloor+\delta_1}$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

I.S.: Es gelte für ein festes $i \in \{1, ..., n-1\}$ die Aussage (iii). τ_{i+1} ist nach

$$\mathcal{F}_t^{\tau_1+\delta_1,...,\tau_i+\delta_i} \subseteq \mathcal{F}_t^{\lfloor\tau_1\rfloor+\delta_1,...,\lfloor\tau_i\rfloor+\delta_i}$$

eine $\mathfrak{F}^{\lfloor\tau_1\rfloor+\delta_1,...,\lfloor\tau_i\rfloor+\delta_i}$-Stoppzeit, was somit nach (ii) auch auf $\lfloor\tau_{i+1}\rfloor$ zutrifft. Weiter erhält man analog zum I.A.

$$\mathcal{F}_t^{\tau_1+\delta_1,...,\tau_{i+1}+\delta_{i+1}} \subseteq \mathcal{F}_t^{\lfloor\tau_1\rfloor+\delta_1,...,\lfloor\tau_i\rfloor+\delta_i,\tau_{i+1}+\delta_{i+1}} \subseteq \mathcal{F}_t^{\lfloor\tau_1\rfloor+\delta_1,...,\lfloor\tau_i\rfloor+\delta_i,\lfloor\tau_{i+1}\rfloor+\delta_{i+1}}.$$

Zu (iv): Sei $\tau \in \mathcal{S}^n_\sigma(\delta, \mathfrak{F})$ und sei $i \in \{2, ..., n\}$. Es gilt

$$\lfloor\tau_i\rfloor - \lfloor\tau_{i-1}\rfloor \geq \lfloor\tau_i - \tau_{i-1}\rfloor \geq \lfloor\delta_{i-1}\rfloor = \delta_{i-1}.$$

Also ist zusammen mit (iii) $(\lfloor\tau_1\rfloor, ..., \lfloor\tau_n\rfloor)$ in $\mathcal{T}^n_\sigma(\delta, \mathfrak{F})$ enthalten. □

Beispiel 4.21. Es gilt für jede $(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$-Stoppzeit σ

$$Z_n^{\delta,\mathfrak{F}}(\sigma) = Z_n^{\delta,\mathfrak{F}}(\sigma)_{\text{disk}} = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}^n_\sigma(\delta,\mathfrak{F})} E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big). \tag{4.17}$$

Beweis. "$\geq$": Es gilt nach Satz 4.14.(i) und Lemma 4.20.(i)

$$Z_n^{\delta,\mathfrak{F}}(\sigma) \geq Z_n^{\delta,\mathfrak{F}}(\sigma)_{\text{disk}} \geq \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}^n_\sigma(\delta,\mathfrak{F})} E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big).$$

"$\leq$": Mit Lemma 4.20.(iv) erhält man für alle $\tau \in \mathcal{S}^n_\sigma(\delta, \mathfrak{F})$

$$E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) = E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\lfloor\tau_i\rfloor)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\rho\in\mathcal{T}^n_\sigma(\delta,\mathfrak{F})} E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\rho_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big).$$ □

4.5 Der Markov-Fall bei zufälligen Wartezeiten

In diesem Abschnitt gelten die Voraussetzungen des Abschnittes 2.2 und die Wartezeiten $\delta_1, ..., \delta_{n-1}$ seien zusätzlich $\mathfrak{F}$-Stoppzeiten. Insbesondere gilt nach Beispiel 4.3 $\mathfrak{F}^{\tau_1+\delta_1,...,\tau_{n-1}+\delta_{n-1}} = \mathfrak{F}$ für alle $\tau \in \mathcal{S}_0^n(\delta, \mathfrak{F})$. Analog zum Abschnitt 2.2 werden zunächst die Definitionen 4.13 und 4.17 auf den vorliegenden Fall übertragen:

Definition 4.22. Für alle $x \in E$ seien

(i) $Z_n^\delta(\sigma, x) := \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_\sigma^n(\delta)} E_x\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big)$ für alle $\sigma \in \mathcal{S}$,

(ii) $V_n^\delta(x) := Z_n^\delta(0, x)$,

(iii) $\overline{Z}_{n-1}^\delta(t, x) := E_x(Z_{n-1}^{L\delta}(t + \delta_1, x)|\mathcal{F}_t)$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und

(iv) $\overline{Z}_{n-1}^{\delta,r}(\cdot, x)$ die in 4.17 eingeführte rechtsseitig-stetige Modifikation von $\overline{Z}_{n-1}^\delta(\cdot, x)$.

Ersetzt man in den Beweisen von R. Carmona und S. Dayanik [6, Chapter 4] die *refracting time* δ durch die Wartezeit δ_1, so erhält man analog die Aussagen von 2.8 und 2.9 für zufällige Wartezeiten:

Definition und Lemma 4.23. *Es wird durch*

$$g_{n-1}^\delta(x) := E_x\Big(e^{-\beta\delta_1} V_{n-1}^{L\delta}(X(\delta_1))\Big) \tag{4.18}$$

eine messbare Abbildung g_{n-1}^δ von E nach $\mathbb{R}_{\geq 0}$ mit den folgenden Eigenschaften definiert:

(i) g_{n-1}^δ ist β-exzessiv und C_0-stetig.

(ii) Der Prozess $\Big(e^{-\beta t} g_{n-1}^\delta(X(t))\Big)_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ ist rechtsseitig-stetig.

(iii) Für alle $x \in E$ und $\tau \in \mathcal{S}$ gilt

$$e^{-\beta\tau} g_{n-1}^\delta(X(\tau)) = \overline{Z}_{n-1}^{\delta,r}(\tau, x) \quad \mathcal{P}_x\text{-fast sicher.} \tag{4.19}$$

□

Satz 4.24. *Für die nicht-negative und C_0-stetige Abbildung*

$$h_n^\delta := h + g_{n-1}^\delta$$

gilt

$$Z_n^\delta(\sigma, x) = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_\sigma} E_x\Big(e^{-\beta\tau} h_n^\delta(X(\tau))\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \quad \mathcal{P}_x\text{-fast sicher,} \tag{4.20}$$

also insbesondere

$$e^{-\beta\sigma}V_n^\delta(X(\sigma)) = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_\sigma} E_x\Big(e^{-\beta\tau}h_n^\delta(X(\tau))\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \quad \mathcal{P}_x\text{-fast sicher} \tag{4.21}$$

für alle $x \in E$ und $\sigma \in \mathcal{S}$. □

Nach dem folgenden Lemma ist das von der in (2.12) definierten Abbildung h erzeugte Stoppgebiet in dem von h_n^δ erzeugten Stoppgebiet enthalten:

Lemma 4.25. *Es sei $g : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine messbare Abbildung so, dass der stochastische Prozess $\Big(e^{-\beta t}g(X(t))\Big)_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ ein rechtsseitig-stetiges und nicht-negatives Supermartingal mit $\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} E_x\Big(e^{-\beta t}g(X(t))\Big) < \infty$ für alle $x \in E$ ist. Dann ist das von h erzeugte Stoppgebiet in dem von $h+g$ enthalten.*

Beweis. Es gilt nach dem allgemeinen Optional-Sampling-Theorem für nicht-negative Supermartingale [2, Theorem 3.22] für jeden Punkt x aus dem von h erzeugten Stoppgebiet

$$\begin{aligned}\sup_{\tau\in\mathcal{S}} E_x\Big(e^{-\beta\tau}(h+g)(X(\tau))\Big) &\leq \sup_{\tau\in\mathcal{S}} E_x\Big(e^{-\beta\tau}h(X(\tau))\Big) + \sup_{\tau\in\mathcal{S}} E_x\Big(e^{-\beta\tau}g(X(\tau))\Big)\\ &= h(x) + E_x\Big(e^{-\beta 0}g(X(0))\Big)\\ &= h(x) + g(x).\end{aligned}$$

□

Folgerung 4.26. $\{x \in E;\ V_1(x) = h(x)\} \subseteq \{x \in E;\ V_n^\delta(x) = h_n(x)\}$.

Beweis. Nach (4.19) ist $\Big(e^{-\beta t}g_{n-1}^\delta(X(t))\Big)_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ ein rechtsseitig-stetiges und nicht-negatives Supermartingal mit $\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} E_x\Big(e^{-\beta t}g_{n-1}^\delta(X(t))\Big) < \infty$ für alle $x \in E$. Daraus resultiert obige Inklusion zusammen mit (4.21) und Lemma 4.25. □

Um das Stoppgebiet eines unbefristeten amerikanischen Puts mit n Ausübungsrechten und zufälligen Wartezeiten zu bestimmen, sei für den Rest dieses Abschnittes W ein Wienerprozess und $\mathfrak{F}$ die von W erzeugte rechtsseitig-stetige Filtration. Es sei weiter $K \in \mathbb{R}_{>0}$ der Ausübungspreis, $\sigma \in \mathbb{R}_{>0}$ die Volatilität, $E = \mathbb{R}_{>0}$, $h(x) = (K-x)^+$ und

$$X(t) = x\ \exp\Big(\sigma W_t + (\beta - \frac{\sigma^2}{2})t\Big)$$

$\mathcal{P}_x$-fast sicher für alle $x \in E$ und $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann ist für jede $\mathfrak{F}$-Stoppzeit σ

$$\begin{aligned}Z_n^\delta(\sigma, x) &= \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_\sigma^n(\delta)} E_x\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big)\\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_\sigma^n(\delta)} E_1\Big(\sum_{i=1}^n e^{-\beta\tau_i}h(xX(\tau_i))\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big)\\ &:= \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_\sigma^n(\delta)} E\Big(\sum_{i=1}^n e^{-\beta\tau_i}h(xX(\tau_i))\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big).\end{aligned}$$

Eine erste Eigenschaft des Stoppgebietes $\Gamma_n^\delta := \{x \in E;\ V_n^\delta(x) = h_n(x)\}$ beinhaltet

Lemma 4.27. *Seien $\delta_1, ..., \delta_{n-1}$ aufsteigend. Es gilt*

$$g^\delta_{n-1}(x) < V^\delta_n(x)$$

$\mathcal{P}_x$-fast sicher für alle $x \in E$. Insbesondere sind $[K, \infty[$ und Γ^δ_n disjunkt.

Beweis. Es gilt nach (4.19) und (4.14)

$$g^\delta_{n-1}(x) = \overline{Z}^{\delta,r}_{n-1}(0,x) = E_x Z^{L\delta}_{n-1}(\delta_1) = \sup_{\tau \in \mathcal{S}^{n-1}_{\delta_1}(L\delta)} E_x\Big(\sum_{i=1}^{n-1} Y(\tau_i)\Big) \leq$$

$$\leq \sup_{\tau \in \mathcal{S}^{n-1}_{\delta_1}((\delta_1,...,\delta_{n-1}))} E_x\Big(\sum_{i=1}^{n-1} Y(\tau_i)\Big) < \sup_{\tau \in \mathcal{S}^n_0(\delta)} E_x\Big(\sum_{i=1}^{n} Y(\tau_i)\Big) = V^\delta_n(x)$$

$\mathcal{P}_x$-fast sicher für alle $x \in E$. Daraus folgt für alle $x \in [K, \infty[$

$$h^\delta_n(x) = h(x) + g^\delta_{n-1}(x) = g^\delta_{n-1}(x) < V^\delta_n(x). \qquad \square$$

Lemma 4.28. *Die Abbildung h^δ_n ist monoton fallend und stetig.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass g^δ_{n-1} monoton fallend und stetig ist.

Zur Monotonie: Für alle $x, y \in E$ mit $x \leq y$ gilt nach (4.19) und (4.13)

$$\begin{aligned} g^\delta_{n-1}(x) &= \overline{Z}^{\delta,r}_{n-1}(0,x) \\ &= \sup_{\tau \in \mathcal{S}^{n-1}_{\delta_1}(L\delta)} E\Big(\sum_{i=1}^{n-1} e^{-\beta\tau_i} h(xX(\tau_i))\Big) \\ &= \sup_{\tau \in \mathcal{S}^{n-1}_{\delta_1}(L\delta)} E\Big(\sum_{i=1}^{n-1} e^{-\beta\tau_i} (K - xX(\tau_i))^+\Big) \\ &\geq \sup_{\tau \in \mathcal{S}^{n-1}_{\delta_1}(L\delta)} E\Big(\sum_{i=1}^{n-1} e^{-\beta\tau_i} (K - yX(\tau_i))^+\Big) \\ &= g^\delta_{n-1}(y). \end{aligned}$$

Zur Stetigkeit: Sei $x_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ und $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine monoton steigende Nullfolge mit Werten in $]-x_0, 0[$. Es gilt für alle $m \in \mathbb{N}$ und $y \leq K/(x_0 + a_m)$

$$\begin{aligned} K - (x_0 + a_m)y &\leq \big(K - x_0 y\big)^+ - a_m y \\ &= \big(K - x_0 y\big)^+ + |a_m| y \\ &\leq \big(K - x_0 y\big)^+ + |a_m| \frac{K}{x_0 + a_m}, \end{aligned}$$

also für alle $m \in \mathbb{N}$ und $y \in \mathbb{R}$

$$\big(K - (x_0 + a_m)y\big)^+ \leq \big(K - x_0 y\big)^+ + |a_m| \frac{K}{x_0 + a_m}.$$

Mit dieser Ungleichung erhält man zusammen mit der Antitonie von g^δ_{n-1}

$$\begin{aligned}
& g^\delta_{n-1}(x_0) \\
\leq\ & g^\delta_{n-1}(x_0+a_m) \\
=\ & \sup_{\tau\in\mathcal{S}^{n-1}_{\delta_1}(L\delta)} E\Big(\sum_{i=1}^{n-1} e^{-\beta\tau_i}(K-(x_0+a_m)X(\tau_i))^+\Big) \\
\leq\ & \sup_{\tau\in\mathcal{S}^{n-1}_{\delta_1}(L\delta)} E\Big(\sum_{i=1}^{n-1} e^{-\beta\tau_i}(K-x_0X(\tau_i))^+\Big) + \sup_{\tau\in\mathcal{S}^{n-1}_{\delta_1}(L\delta)} E\Big(\sum_{i=1}^{n-1} e^{-\beta\tau_i}|a_m|\frac{K}{x_0+a_m}\Big) \\
\leq\ & g^\delta_{n-1}(x_0)+(n-1)|a_m|\frac{K}{x_0+a_m}.
\end{aligned}$$

Also ist g^δ_{n-1} linksseitig-stetig. Weiter existiert aufgrund der Monotonie von g^δ_{n-1} für jede monoton fallende Nullfolge $(b_m)_{m\in\mathbb{N}}$ mit Werten in $]0,x_0[$ der rechtsseitige Grenzwert $\lim\limits_{m\to\infty} g^\delta_{n-1}(x_0+b_m)\leq g^\delta_{n-1}(x_0)$ und es gilt für alle $\tau\in\mathcal{S}^{n-1}_{\delta_1}(L\delta)$

$$\begin{aligned}
E\Big(\sum_{i=1}^{n-1} e^{-\beta\tau_i}h(x_0X(\tau_i))\Big) &= \lim_{m\to\infty} E\Big(\sum_{i=1}^{n-1} e^{-\beta\tau_i}h((x_0+b_m)X(\tau_i))\Big) \\
&\leq \lim_{m\to\infty} g^\delta_{n-1}(x_0+b_m).
\end{aligned}$$

Also ist

$$g^\delta_{n-1}(x_0)=\sup_{\tau\in\mathcal{S}^{n-1}_{\delta_1}(L\delta)} E\Big(\sum_{i=1}^{n-1} e^{-\beta\tau_i}h(x_0X(\tau_i))\Big)\leq \lim_{m\to\infty} g^\delta_{n-1}(x_0+b_m). \qquad \square$$

Daraus resultiert zusammen mit (4.21) und A. Shiryayev [31, Chapter 3, Lemma 4]

Folgerung 4.29. *V^δ_n ist unterhalbstetig und Γ^δ_n ist abgeschlossen.* $\square$

R. Carmona und N. Touzi [7, Proposition 3.1] haben bewiesen, dass das Stoppgebiet Γ^δ_n für eine feste refracting time $\delta\in\mathbb{R}_{>0}$ ein durch K beschränktes Intervall ist. Diese Darstellung von Γ^δ_n kann man mit den vorherigen Hilfssätzen auf zufällige Wartezeiten übertragen:

Beispiel 4.30. Sei $x_1^* := \frac{K}{1+\sigma^2/2\beta}$. Unter den Voraussetzungen des Lemmas 4.27 gilt: Es existiert $x_n^*\in[x_1^*,K]$ mit $\Gamma^\delta_n=[0,x_n^*]$. Insbesondere ist die Stoppzeit

$$\tau_{x_n^*} := \inf\{t\in\mathbb{R}_{\geq 0};\ X(t)\leq x_n^*\}$$

optimal für das Stoppproblem (4.21).

Beweis. Nach G. Peskir und A. Shiryaev [27, Theorem 25.1] und Folgerung 4.26 ist $[0,x_1^*]$ in Γ^δ_n enthalten. Weiter sind nach Lemma 4.27 Γ^δ_n und $[K,\infty[$ disjunkt.

Annahme : Für alle $x_n^* \in [x_1^*, K]$ gilt $\Gamma_n^\delta \neq [0, x_n^*]$.

Unter dieser Annahme existiert $x \in]x_1^*, K[\setminus \Gamma_n^\delta$ mit $[x, K] \cap \Gamma_n^\delta \neq \emptyset$. Definiere

$$x_1 := \sup\{b \in \mathbb{R}_{<x};\ b \in \Gamma_n^\delta\} \quad \text{und} \quad x_2 := \inf\{b \in \mathbb{R}_{>x};\ b \in \Gamma_n^\delta\}.$$

Da Γ_n^δ nach Folgerung 4.29 abgeschlossen ist, sind die Punkte x_1 und x_2 in Γ_n^δ enthalten. Weiter sind nach der Definition von x_1 und x_2 die Mengen $]x_1, x_2[$ und Γ_n^δ disjunkt. Also ist nach A. Shiryayev [31, Chapter 3, Theorem 3] die Stoppzeit

$$\tau^* := \inf\{t \in \mathbb{R}_{\geq 0};\ X(t) \in \{x_1, x_2\}\}$$

optimal für das Optimierungsproblem

$$V_n^\delta(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{S}} E_x\Big(e^{-\beta\tau} h_n^\delta(X(\tau))\Big).$$

Daraus folgt zusammen mit der Martingaleigenschaft von $\Big(e^{-\beta t} X(t)\Big)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$

$$\begin{aligned}
V_n^\delta(x) &= E_x\Big(e^{-\beta\tau^*} h_n^\delta(X(\tau^*))\Big) \\
&= E_x\Big(e^{-\beta\tau^*} h(X(\tau^*))\Big) + E_x\Big(e^{-\beta\tau^*} g_{n-1}^\delta(X(\tau^*))\Big) \\
&\overset{x_2 \leq K}{=} E_x\Big(e^{-\beta\tau^*} (K - X(\tau^*))\Big) + E_x\Big(e^{-\beta\tau^*} g_{n-1}^\delta(X(\tau^*))\Big) \\
&\leq K - E_x\Big(e^{-\beta\tau^*} X(\tau^*)\Big) + E_x\Big(e^{-\beta\tau^*} g_{n-1}^\delta(X(\tau^*))\Big) \\
&= K - x + E_x\Big(e^{-\beta\tau^*} g_{n-1}^\delta(X(\tau^*))\Big) \\
&= h(x) + E_x\Big(e^{-\beta\tau^*} g_{n-1}^\delta(X(\tau^*))\Big) \\
&\overset{(4.19)}{\leq} h(x) + E_x\Big(e^{-\beta 0} g_{n-1}^\delta(X(0))\Big) \\
&= h_n(x).
\end{aligned}$$

Dieses ist ein Widerspruch zu $x \notin \Gamma_n^\delta$. □

4.6 Alternative Modellierung

Es sei weiter das Modell 1.1 gegeben. Dieser Abschnitt beinhaltet eine weitere Möglichkeit ein mehrfaches Optimierungsproblem mit zufälligen Wartezeiten zu modellieren. Dafür seien $B_1, ..., B_{n-1}$ Borelsche Mengen und $X = (X(t))_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ ein weiterer $\mathfrak{F}$-adaptierter und rechtsseitig-stetiger Prozess derart, dass für alle $i \in \mathbb{N}_{<n}$ und $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\bigcup_{t > s} \{X(t) \notin B_i\} \quad \text{eine } \mathcal{P}\text{-Nullmenge}$$

und die Abbildung

$$\rho_s^{B_i} := \inf\{t > s;\ X(t) \in B_i\} \quad \text{eine } \mathfrak{F}\text{-Stoppzeit ist.} \tag{4.22}$$

Beispiele in denen (4.22) erfüllt ist, beinhaltet die folgende bekannte Anmerkung, siehe O. Kallenberg [19, Lemma 7.6].

Anmerkung 4.31. (i) Unter der Bedingung (4.22) ist

$$\rho_\sigma^{B_i} := \inf\{t > \sigma;\ X(t) \in B_i\}$$

für alle $i \in \mathbb{N}_{<n}$ und jede $\mathfrak{F}$-Stoppzeit σ ebenfalls eine $\mathfrak{F}$-Stoppzeit.

(ii) Die Bedingung (4.22) ist den beiden folgenden Fällen erfüllt:

(a) $B_1, ..., B_{n-1}$ sind offen.

(b) $B_1, ..., B_{n-1}$ sind abgeschlossen und X ist ein stetiger Prozess.

In diesem Abschnitt werden mehrfache Optimierungsprobleme mit zufälligen Wartezeiten gemäß der folgenden Definition betrachtet:

Definition 4.32. Sei $B := (B_1, ..., B_{n-1})$ und $\mathcal{S}$ die Menge der $\mathfrak{F}$-Stoppzeiten. Definiere für alle $\sigma \in \mathcal{S}$

$$Z_n(\sigma) := Z_n^B(\sigma) := \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_\sigma^n(B)} E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big), \tag{4.23}$$

wobei

$$\mathcal{S}_\sigma^n(B) := \{\tau \in \mathcal{S}^n;\ \sigma \le \tau_1,\ \rho_{\tau_i}^{B_i} \le \tau_{i+1} \text{ für alle } i \in \mathbb{N}_{<n}\}.$$

Ein Anwendungsbeispiel des mehrfachen Optimierungsproblems (4.23) ist die in Abschnitt 3.5.2 beschriebene Produktionsplanung mit beschränkten Ressourcen: Die Wartezeit zwischen den einzelnen Ausübungen kann in diesem Fall wie in 3.5.2 dargestellt die Länge des Zeitraumes sein, die man zum Einholen von Angeboten bzgl. der beschränken Ressource benötigt. Werden diese Angebote von verschiedenen Unternehmen eingeholt, so ist die Wartezeit keine Konstante δ, sondern die zufällige Länge des Zeitraums bis die Unternehmen erreichbar sind. Ist dies zum Zeitpunkt t genau dann der Fall, wenn der stochastische Prozess X zum Zeitpunkt t in B_1 liegt, so kann man mit den Strategien τ_1 und τ_2 genau dann die ersten zwei Mal ausüben, wenn die Bedingung $\rho_{\tau_1}^{B_1} \le \tau_2$ erfüllt ist. In diesem Beispiel sind X und Y stochastisch unabhängig und X ein Markovprozess.
Ein weiteres Beispiel für das in (4.23) definierte mehrfache Stoppproblem mit zufälligen Wartezeiten sind die in Abschnitt 1.2 beschriebenen Mitarbeiteroptionen: Der Inhaber dieser variablen Vergütungskomponente darf die Option zum $(i+1)$-ten Mal ausüben,

wenn die liquiden Mittel des entsprechenden Unternehmens nach der i-ten Ausübung einen vorher festgelegten Wert überschreiten. Mit den liquiden Mitteln werden anschließend die Anteile des Unternehmens, die dem Inhaber der Option zustehen, am Markt gekauft, damit keine neuen Anteile ausgegeben werden müssen. In diesem Fall entspricht X der Barliquidität, die nicht unabhängig zum Preisprozess Y eines amerikanischen Calls des Unternehmens ist. Weiter sind $B_1, ..., B_{n-1}$ nach oben unbeschränkte Intervalle.

Beispiel 4.33. Sei $\sigma \in \mathcal{S}$. Ist für eine optimale Stoppzeit τ^* des Optimierungsproblems

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}} E(Y(\tau)|\mathcal{F}_\sigma)$$

die Stoppzeit $\rho_{\tau^*}^{B_i}$ gleich τ^* für alle $i \in \mathbb{N}_{<n}$, so ist $Z_n^B(\sigma) = n\, E(Y(\tau^*)|\mathcal{F}_\sigma)$.

Beweis. Ist für alle $i \in \mathbb{N}$ die Stoppzeit $\rho_{\tau^*}^{B_i}$ gleich τ^*, so ist $(\tau^*, ..., \tau^*)$ in $\mathcal{S}_\sigma^n(B)$ enthalten. Also gilt

$$Z_n^B(\sigma) = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_\sigma^n(B)} E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \geq n\, E(Y(\tau^*)|\mathcal{F}_\sigma).$$

Die umgekehrte Ungleichung folgt direkt aus der Definition 4.32. □

Mit der Definition 4.32 erhält man die in Beispiel 4.21 gezeigte Gleichheit von $Z_n^{\delta,\mathfrak{F}}(\sigma)$ und $Z_n^{\delta,\mathfrak{F}}(\sigma)_{\text{disk}}$ auch im kontinuierlichen Fall:

Lemma 4.34. *Sei $\sigma \in \mathcal{S}$.*

(i) Mit der Bezeichnung

$$\mathcal{S}_\sigma^n(B)_{\text{disk}} := \{\tau \in \mathcal{S}_\sigma^n(B); \text{Bild}(\tau_1), ..., \text{Bild}(\tau_n)\text{ abz.}\}$$

gilt

$$Z_n^B(\sigma) = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_\sigma^n(B)_{\text{disk}}} E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big). \tag{4.24}$$

(ii) Die Menge $\{E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big);\ \tau \in \mathcal{S}_\sigma^n(B)\}$ ist nach oben gerichtet.

Beweis. Zu (i): Sei $\tau \in \mathcal{S}_\sigma^n(B)$. Es existiert für alle $i \in \mathbb{N}_{\leq n}$ eine Folge von Stoppzeiten $(\tau_k^i)_{k\in\mathbb{N}}$ mit abzählbarem Wertebereich und $\tau_k^i \downarrow \tau_i$ für $k \to \infty$. Definiere für alle $k \in \mathbb{N}$ rekursiv

$$\tilde{\tau}_k^1 := \tau_k^1 \quad \text{und} \quad \tilde{\tau}_k^{i+1} = \max\{\rho_{\tilde{\tau}_k^i}^{B_i}, \tau_k^{i+1}\}.$$

Dann ist für alle $k \in \mathbb{N}$ $(\tilde{\tau}_k^i)_{i\in\mathbb{N}_{\leq n}}$ in $\mathcal{S}_\sigma^n(B)$ enthalten. Es wird nun durch Induktion über i gezeigt, dass $(\tilde{\tau}_k^i)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist und $\mathcal{P}$-fast sicher gegen τ_i konvergiert, wobei der Induktionsanfang direkt aus der Gleichung $\tilde{\tau}_k^1 = \tau_k^1$ resultiert. Ist

$(\tilde{\tau}_k^i)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und konvergiert $\mathcal{P}$-fast sicher gegen τ_i mit $i \in \{1, ..., n-1\}$, so ist offensichtlich $(\tilde{\tau}_k^{i+1})_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und man erhält

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \tilde{\tau}_k^{i+1} &= \max\{\lim_{k\to\infty} \rho^{B_i}_{\tilde{\tau}_k^i}, \lim_{k\to\infty} \tau_k^{i+1}\} \\
&= \max\Big\{\lim_{k\to\infty} \inf\{t > \tilde{\tau}_k^i;\ X(t) \in B_i\}, \tau_{i+1}\Big\} \\
&= \max\Big\{\inf\{t > \lim_{k\to\infty} \tilde{\tau}_k^i;\ X(t) \in B_i\}, \tau_{i+1}\Big\} \\
&= \max\Big\{\inf\{t > \tau_i;\ X(t) \in B_i\}, \tau_{i+1}\Big\} \\
&= \tau_{i+1}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) = \lim_{k\to\infty} E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tilde{\tau}_k^i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \le \operatorname*{ess\,sup}_{\rho\in\mathcal{S}_\sigma^n(B)_{\text{disk}}} E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\rho_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big).$$

Zu (ii): Seien $\tau, \rho \in \mathcal{S}_\sigma^n(B)$. Definiere die Menge A und die Familie von Stoppzeiten $(\nu_1, ..., \nu_n)$ wie im Beweis von Lemma 4.10. Nach der Beweisidee von 4.10 reicht es zu zeigen, dass $(\nu_1, ..., \nu_n)$ in $\mathcal{S}_\sigma^n(B)$ enthalten ist. Dieses erhält man unmittelbar aus

$$\begin{aligned}
\rho^{B_i}_{\nu_i} &= \inf\{t > \nu_i;\ X(t) \in B_i\} \\
&= \inf\{t > 1_A\,\tau_i + 1_{A^c}\,\rho_i;\ X(t) \in B_i\} \\
&= 1_A \inf\{t > \tau_i;\ X(t) \in B_i\} + 1_{A^c} \inf\{t > \rho_i;\ X(t) \in B_i\} \\
&= 1_A\,\rho^{B_i}_{\tau_i} + 1_{A^c}\,\rho^{B_i}_{\rho_i} \\
&\le 1_A\,\tau_{i+1} + 1_{A^c}\,\rho_{i+1} \\
&= \nu_{i+1}
\end{aligned}$$

für alle $i \in \mathbb{N}_{<n}$. □

Da nach Lemma 4.34.(ii) die Menge $\{E\Big(\sum\limits_{i=1}^n Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big);\ \tau \in \mathcal{S}_\sigma^n(\delta)\}$ nach oben gerichtet ist, kann man analog zum Satz 4.15 den Beweis des Satzes 3.10 direkt auf $Z_n^B(\sigma)$ übertragen:

Satz 4.35. *Für alle $\sigma \in \mathcal{S}$ gilt mit der Bezeichnung $LB := (B_2, ..., B_{n-1})$*

$$\begin{aligned}
Z_n^B(\sigma) &= \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_{\sigma,\text{disk}}} E\Big(Y(\tau) + E\big(Z_{n-1}^{LB}(\rho_\tau^{B_1})|\mathcal{F}_\tau\big)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) &\quad (4.25)\\
&= \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_\sigma} E\Big(Y(\tau) + E\big(Z_{n-1}^{LB}(\rho_\tau^{B_1})|\mathcal{F}_\tau\big)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big). &\quad (4.26)
\end{aligned}$$

□

Im Gegensatz zum Modell aus Abschnitt 4.3 erhält man die zweite Aussage des folgenden Lemmas direkt aus der Definition des Stoppproblems (4.23).

Definition und Lemma 4.36. *Es wird durch*

$$\overline{Z}^B_{n-1}(t) := E\big(Z^{LB}_{n-1}(\rho^{B_1}_t)|\mathcal{F}_t\big) \tag{4.27}$$

ein Supermartingal $\overline{Z}^B_{n-1}$ *mit den folgenden Eigenschaften definiert:*

(i) $\overline{Z}^B_{n-1}$ *besitzt eine rechtsseitig-stetige Modifikation* $\overline{Z}^{B,r}_{n-1}$.

(ii) Für alle $\tau \in \mathcal{S}$ *mit abzählbarem Wertebereich gilt*

$$\overline{Z}^{B,r}_{n-1}(\tau) = \overline{Z}^B_{n-1}(\tau) = E\big(Z^{LB}_{n-1}(\rho^{B_1}_\tau)|\mathcal{F}_\tau\big). \tag{4.28}$$

Beweis. Es gilt für alle $s, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $s \leq t$ die Ungleichungen $s \leq \rho^{B_1}_s \leq \rho^{B_1}_t$ und somit

$$E(\overline{Z}^B_{n-1}(t)|\mathcal{F}_s) = E\Big(E(Z^{LB}_{n-1}(\rho^{B_1}_t)|\mathcal{F}_{\rho^{B_1}_s})\Big|\mathcal{F}_s\Big) \overset{1)}{\leq} E(Z^{LB}_{n-1}(\rho^{B_1}_s)|\mathcal{F}_s) = \overline{Z}^B_{n-1}(s).$$

Dabei resultiert 1) aus

$$\begin{aligned} E(Z^{LB}_{n-1}(\rho^{B_1}_t)|\mathcal{F}_{\rho^{B_1}_s}) &= E\Big[\operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}^{n-1}_{\rho^{B_1}_t}(LB)} E\Big(\sum_{i=1}^{n-1} Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_{\rho^{B_1}_t}\Big)\Big|\mathcal{F}_{\rho^{B_1}_s}\Big] \\ &\leq E\Big[\operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}^{n-1}_{\rho^{B_1}_s}(LB)} E\Big(\sum_{i=1}^{n-1} Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_{\rho^{B_1}_t}\Big)\Big|\mathcal{F}_{\rho^{B_1}_s}\Big] \\ &\overset{4.34.\text{(ii)}}{=} \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}^{n-1}_{\rho^{B_1}_s}(LB)} E\Big(\sum_{i=1}^{n-1} Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_{\rho^{B_1}_s}\Big) \\ &= Z^{LB}_{n-1}(\rho^{B_1}_s). \end{aligned} \tag{4.29}$$

Die Eigenschaft (i) gilt nach I. Karatzas und S. Shreve [20, Theorem 3.13] und (ii) folgt aus der Definition von $\overline{Z}^B_{n-1}$. □

Damit erhält man

Satz 4.37. $Y_n := Y^B_n := Y + \overline{Z}^{B,r}_{n-1}$ *ist ein* $\mathfrak{F}$*-adaptierter und rechtsseitig-stetiger stochastischer Prozess mit*

$$Z^B_n(\sigma) = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_\sigma} E(Y_n(\tau)|\mathcal{F}_\sigma) \tag{4.30}$$

für alle $\sigma \in \mathcal{S}$.

Beweis. Es gilt nach Satz 4.35, Lemma 4.36.(ii) und der rechtsseitigen Stetigkeit von Y_n

$$\begin{aligned} Z^B_n(\sigma) &= \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_{\sigma,\text{disk}}} E\Big(Y(\tau) + E\big(Z^{LB}_{n-1}(\rho^{B_1}_\tau)|\mathcal{F}_\tau\big)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_{\sigma,\text{disk}}} E\Big(Y_n(\tau)|\mathcal{F}_\tau\Big)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_\sigma} E\Big(Y_n(\tau)|\mathcal{F}_\tau\Big)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big). \end{aligned}$$

□

Überträgt man die Beweisidee von Folgerung 1.22.(i) auf (4.27), erhält man folgende Verallgemeinerung von Lemma 4.36.(ii):

Folgerung 4.38. *Für alle $\tau \in \mathcal{S}$ gilt $\overline{Z}_{n-1}^{B,r}(\tau) = E\big(Z_{n-1}^{LB}(\rho_\tau^{B_1})|\mathcal{F}_\tau\big)$.* □

Für den Rest dieses Abschnittes sei für einen endlichen Horizont $T \in \mathbb{R}_{>0}$ der Auszahlungsprozess $Y_{|[T,\infty[} \equiv Y(T)$ und $\mathcal{F}_{|[T,\infty[} \equiv \mathcal{F}_T$. Nach Satz 3.6 ist für alle $\sigma \in \mathcal{S}^T$ das Stoppproblem $Z_n^B(\sigma)$ gleich dem n-fachen Optimierungsproblem

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_\sigma^{T,n}(B)} E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big), \tag{4.31}$$

wobei $\mathcal{S}_\sigma^{T,n}(B) := \{\tau \in \mathcal{S}^n;\ \sigma \leq \tau_1 \leq ... \leq \tau_n \leq T,\ \rho_{\tau_i}^{B_i} \wedge T \leq \tau_{i+1}\,\text{für alle } i \in \mathbb{N}_{<n}\}$.

Sei $p \in \mathbb{R}_{>1}$. Ist in diesem Modell mit endlichem Horizont die Zufallsgröße $\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} Y(t)$ in L^p enthalten, d.h. $E\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} Y^p(t)\Big) < \infty$, so auch $\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} Y_n(t)$. Für den Beweis dieser Aussage benötigt man

Satz 4.39. *Sei $p \in \mathbb{R}_{>1}$ und sei $\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} Y(t)$ in L^p enthalten. Es gilt*

$$E\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} (Z_n^{B\circ})^p(t)\Big) < \infty, \tag{4.32}$$

wobei mit $Z_n^{B\circ}$ das minimal dominierende rechtsseitig-stetige Supermartingal von Y_n bezeichnet sei.

Beweis. Nach I. Karatzas und S. Shreve [20, Theorem 3.13] existiert ein nicht-negatives und rechtsseitig-stetiges Martingal $(M(t))_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ mit $M(t) = E\Big(\sup_{s\in\mathbb{R}_{\geq 0}} Y(s)\Big|\mathcal{F}_t\Big)$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Für dieses Martingal gilt nach der Doobschen und der Jensenschen Ungleichung

$$\begin{aligned}
E\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} M^p(t)\Big) &= E\Big(\sup_{t\in[0,T]} M^p(t)\Big) \\
&\leq \Big(\frac{p}{1-p}\Big)^p E\Big(M^p(T)\Big) \\
&= \Big(\frac{p}{1-p}\Big)^p E\Big(E\Big(\sup_{s\in\mathbb{R}_{\geq 0}} Y(s)\Big|\mathcal{F}_T\Big)^p\Big) \\
&\leq \Big(\frac{p}{1-p}\Big)^p E\Big(\sup_{s\in\mathbb{R}_{\geq 0}} Y^p(s)\Big) \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

also

$$E\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} (Z_n^{B\circ})^p(t)\Big) \leq E\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} n^p M^p(t)\Big) < \infty.$$ □

Damit erhält man für den neuen Auszahlungsprozess Y_n

Folgerung 4.40. *Unter den Voraussetzungen des Satzes 4.39 ist* $\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} Y_n(t)$ *in* L^p *enthalten.*

Beweis. Ersetzt man in (4.29) $\rho_s^{B_1}$ durch t, erhält man $E(Z_{n-1}^{LB}(\rho_t^{B_1})|\mathcal{F}_t) \leq Z_{n-1}^{LB}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Also gilt mit den Bezeichnungen aus Satz 4.39

$$\overline{Z}_{n-1}^{B,r}(t) = E(Z_{n-1}^{LB}(\rho_t^{B_1})|\mathcal{F}_t) \leq Z_{n-1}^{LB}(t) = Z_{n-1}^{LB\,\circ}(t),$$

woraus zusammen mit der rechtsseitigen Stetigkeit von $\overline{Z}_{n-1}^{B,r}$ und $Z_{n-1}^{LB\,\circ}$ die Ungleichung

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} \overline{Z}_{n-1}^{B,r}(t) \leq \sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} Z_{n-1}^{LB\,\circ}(t)$$

resultiert. Daraus folgt mit Satz 4.39

$$\begin{aligned} E\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} Y_n^p(t)\Big) &= E\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} (Y + \overline{Z}_{n-1}^{B,r})^p(t)\Big) \\ &\leq 2^p\Big(E\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} Y^p(t)\Big) + E\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} (\overline{Z}_{n-1}^{B,r})^p(t)\Big)\Big) \\ &\leq 2^p\Big(E\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} Y^p(t)\Big) + E\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} (Z_{n-1}^{LB\,\circ})^p(t)\Big)\Big) \\ &< \infty. \end{aligned}$$

□

4.7 Duale Darstellung von Stoppproblemen mit mehrfachen Ausübungsrechten

In diesem Abschnitt wird die von L. Rogers [28, Theorem 2.1] bewiesene und in Satz 4.42 wiederholte duale Darstellung des Stoppproblems mit einem Ausübungsrecht auf das mehrfache Optimierungsproblem mit zufälligen Wartezeiten übertragen. Dafür wird das n-fache Stoppproblem mit endlichem Horizont $T \in \mathbb{R}_{>0}$, welches zum letzten im Modell berücksichtigten Handelszeitpunkt T mehrfache Ausübungen ermöglicht, betrachtet, d.h. für jede Stoppzeit σ

$$\tilde{Z}_n^{B,T}(\sigma) := \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\tilde{\mathcal{S}}_\sigma^{T,n}(B)} E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big), \tag{4.33}$$

wobei $\tilde{\mathcal{S}}_\sigma^{n,T}(B) := \{\tau \in \mathcal{S}^n;\ \sigma \leq \tau_1 \leq ... \leq \tau_n \leq T,\ \rho_{\tau_i}^{B_i} \wedge T \leq \tau_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}_{<n}\}$. Um die Bezeichnungen aus Abschnitt 4.6 beizubehalten, sei zusätzlich gefordert, dass der Auszahlungsprozess und die zugrundeliegende Filtration die Bedingungen $Y_{|[T,\infty[} \equiv Y(T)$ und $\mathcal{F}_{|[T,\infty[} \equiv \mathcal{F}_T$ erfüllen. Analog zum Satz 3.6 stimmen dann $Z_n^B(\sigma)$ und $\tilde{Z}_n^{B,T}(\sigma)$ überein. Weiter sei, wie von L. Rogers [28] gefordert, dass für ein festes $p \in \mathbb{R}_{>1}$ gilt

$$E\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} Y^p(t)\Big) = E\Big(\sup_{t\in[0,T]} Y^p(t)\Big) < \infty.$$

Für die in den ersten drei Kapiteln behandelten *mehrfachen Stoppprobleme mit konstanten Wartezeiten* wurde im diskreten Fall von J. Schoenmakers [29, Theorem 2] für das Modell (1.7) und im kontinuierlichen Fall von C. Bender [2, Theorem 3.2] und [3] für das Modell (3.2) eine duale Darstellung ähnlich der von L. Rogers aufgezeigt. Weiter sei darauf hingewiesen, dass man das Beispiel 4.9.(ii) nicht auf das Modell in Definition 4.32 übertragen kann. Die mehrfachen Stoppprobleme mit konstanten Wartezeiten (1.7) und (3.2) sind also kein Spezialfall des Optimierungsproblems mit zufälligen Wartezeiten gemäß Definition (4.33).
Algorithmen, die mit Hilfe einer dualen Darstellung Optionen mit mehreren Ausübungsrechten bewerten, beinhalten M. Haugh und L. Kogan [15], L. Andersen und M. Broadie [1] und N. Chen und P. Glasserman [8]. In den meisten Algorithmen wird die duale Darstellung dazu verwendet, um eine untere Schranke des fairen Preises einer Optionen mit mehreren Ausübungsrechten zu bestimmen.

Für die Formulierung der dualen Darstellung benötigt man

Definition 4.41. (i) Für jeden rechtsseitig-stetigen Prozess $(U(t))_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ sei

$$\sup_{t\geq\sigma} U(t)(\omega) := \sup_{t\geq\sigma(\omega)} U(t)(\omega)$$

für alle $\sigma \in \mathcal{S}$ und $\omega \in \Omega$.

(ii) $\mathcal{H}^1$ die Menge aller rechtsseitig-stetigen Martingale $(M(t))_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ mit den Eigenschaften $E\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} |M(t)|\Big) < \infty$ und $M|_{[T,\infty[} \equiv M(T)$.

Für das klassische Stoppproblem gilt nach L. Rogers [28]

Satz 4.42. *Es gilt für jede Stoppzeit* σ

$$Z_1(\sigma) := \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_\sigma} E\Big(Y(\tau)|\mathcal{F}_\sigma\Big) = \operatorname*{ess\,inf}_{M\in\mathcal{H}^1} E\Big(\sup_{t\geq\sigma}(Y-M)(t) + M(\sigma)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big). \tag{4.34}$$

Wird mit $Z_1{}^\circ$ *das minimal dominierende rechtsseitig-stetige Supermartingal von* Z_1 *bezeichnet, so gilt für das rechtsseitig-stetige Martingal* M^* *aus der Doob-Meyer Zerlegung von* $Z_1{}^\circ$

$$Z_1(\sigma) = \sup_{t\geq\sigma}(Y - M^*)(t) + M^*(\sigma).$$

Für den Beweis der dualen Darstellung des mehrfachen Optimierungsproblems mit zufälligen Wartezeiten (4.39) benötigt man den folgenden allgemeinen Satz für nicht-negative Supermartingale:

Satz 4.43. *Es sei $q \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ und $U = (U(t))_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ ein nicht-negatives und rechtsseitig-stetiges Supermartingal mit $E\big(\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} U^q(t)\big) < \infty$. Dann ist der (bis auf Ununterscheidbarkeit) eindeutig bestimme vorhersehbare, rechtsseitig-stetige und monoton fallende Prozess $(A(t))_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ aus der Doob-Meyer Zerlegung von U q-integrierbar, d.h.*

$$E\Big(|A(\infty)|^q\Big) < \infty, \tag{4.35}$$

wobei $A(\infty) := \lim\limits_{t\to\infty} A(t)$.

Beweis. Da $E\big(\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} U^q(t)\big) < \infty$, ist U in der Klasse D enthalten und somit der Prozess A nach der Doob-Meyer Zerlegung integrierbar und das rechtsseitig-stetige Martingal $M = (M(t))_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ aus der Doob-Meyer Zerlegung von U gleichgradig integrierbar. Also gilt für $q = 1$ die Aussage (4.35) nach I. Karatzas und S. Shreve [20, Theorem 4.10]. Weiter folgt aus I. Karatzas und S. Shreve [20, Problem 3.20], dass $M(\infty) := \lim_{t\to\infty} M(t)$ existiert und $(M(t))_{t\in[0,\infty]}$ ein Martingal ist. Zudem existiert nach dem Konvergenzsatz für Supermartingale [20, Theorem 3.15] $U(\infty) := \lim_{t\to\infty} U(t)$, woraus zusammen mit der Bezeichnung $\xi := 2\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} U(t)$ die Ungleichung

$$\begin{aligned}
E\big(A(t) - A(\infty)|\mathcal{F}_t\big) &= E\big(U(t) - M(t) - U(\infty) + M(\infty)|\mathcal{F}_t\big) \\
&= E\big(U(t) - U(\infty)|\mathcal{F}_t\big) \\
&\leq E\big(2 \sup_{s\in\mathbb{R}_{\geq 0}} U(s)|\mathcal{F}_t\big) \\
&= E\big(\xi|\mathcal{F}_t\big)
\end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ resultiert. Also erfüllen A und ξ die Voraussetzungen des Satzes 25.21 von O. Kallenberg [19] und man erhält nach diesem Satz für $q > 1$ die Ungleichung

$$E\Big(|A(\infty)|^q\Big) \leq q^q E\Big(\xi^q\Big) = (2q)^q E\big(\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} U^q(t)\big) < \infty. \qquad \square$$

Bezeichnung 4.44. Definiere $L^i B := (B_{i+1}, ..., B_{n-1})$ für alle $i \in \{0, ..., n-1\}$. Mit

(i) $Z_i^{L^{n-i}B\circ}$ sei das minimal dominierende rechtsseitig-stetige Supermartingal von den in Satz 4.37 definierten Prozess $Y_i^{L^{n-i}B}$,

(ii) $A_i^* = (A_i^*(t))_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ der (bis auf Ununterscheidbarkeit) eindeutig bestimme vorhersehbare, rechtsseitig-stetige und monoton fallende Prozess aus der Doob-Meyer Zerlegung von $Z_i^{L^{n-i}B\circ}$ und

(iii) $M_i^* = (M_i^*(t))_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ das rechtsseitig-stetige Martingal aus der Doob-Meyer Zerlegung von $Z_i^{L^{n-i}B\circ}$

für alle $i \in \{1, ..., n\}$ bezeichnet.

Mit diesen Bezeichnungen und Satz 4.43 erhält man

Lemma 4.45. *Sei $i \in \{1, ..., n\}$. Es gilt für die Prozesse A_i^* und M_i^*:*

(i) $A_i^*|_{[T,\infty[} \equiv A_i^*(T)$ *und* $M_i^*|_{[T,\infty[} \equiv M_i^*(T)$.

(ii) $E\Big(|A_i^*(T)|^p\Big) < \infty$ *und* $E\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} |M_i^*(t)|^p\Big) < \infty$.

Beweis. Die erste Aussage resultiert aus $Y_{|[T,\infty[} \equiv Y(T)$. Die zweite Aussage gilt für den Prozess A_i^* nach den Sätzen 4.39 und 4.43. Also ist

$$\begin{aligned} E\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} |M_i^*(t)|^p\Big) &= E\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} |Z_i^{L^{n-i}B\circ}(t) - A_i^*(t)|^p\Big) \leq \\ \leq \quad 2^p \Big[E\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} |Z_i^{L^{n-i}B\circ}(t)|^p\Big) &+ E\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} |A_i^*(t)|^p\Big)\Big] < \infty. \end{aligned}$$

□

Lemma 4.46. *Sei $(A(t))_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ ein $\mathfrak{F}$-adaptierter, rechtsseitig-stetiger, integrierbarer und monoton fallender Prozess mit $A(0) = 0$ und $E\big(\lim_{t\to\infty} A(t)\big) < \infty$. Es existiert ein $\mathfrak{F}$-adaptierter und rechtsseitig-stetiger Prozess $(\tilde{A}(t))_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ mit*

$$\tilde{A}(\tau) = E\Big(A(\rho_\tau^{B_1})\Big|\mathcal{F}_\tau\Big) \tag{4.36}$$

für alle $\tau \in \mathcal{S}$. Ist zusätzlich $A|_{[T,\infty[} \equiv A(T)$ und $E(|A(T)|^p) < \infty$, so gilt

$$\tilde{A}_{|[T,\infty[} \equiv \tilde{A}(T) \quad \textit{und} \quad E\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} |\tilde{A}(t)|^p\Big) < \infty. \tag{4.37}$$

Beweis. Es sei $A(\infty) := \lim_{t\to\infty} A(t)$ und M ein rechtsseitig-stetiges Martingal mit $M(t) = E(A(\infty)|\mathcal{F}_t)$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Es gilt $M(\tau) = E(A(\infty)|\mathcal{F}_\tau)$ für alle $\tau \in \mathcal{S}$, woraus die Gleichung

$$\begin{aligned} \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_\sigma} E((A-M)(\tau)|\mathcal{F}_\sigma) &= \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_\sigma} E(A(\tau)|\mathcal{F}_\sigma) - E(M(\tau)|\mathcal{F}_\sigma) \\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_\sigma} E(A(\tau)|\mathcal{F}_\sigma) - E\big(E(A(\infty)|\mathcal{F}_\tau)|\mathcal{F}_\sigma\big) \\ &= A(\sigma) - M(\sigma) \end{aligned} \tag{4.38}$$

für alle $\sigma \in \mathcal{S}$ resultiert. Wendet man Lemma 4.36 für $n = 2$ auf den nicht-negativen und rechtsseitig-stetigen Auszahlungsprozess $A - M$ an, erhält man die Existenz eines rechtsseitig-stetigen Prozesses $(\tilde{Z}^r(t))_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ mit

$$\tilde{Z}^r(t) = E\Big(\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_{\rho_t^{B_1}}} E\Big[(A-M)(\tau)\Big|\mathcal{F}_{\rho_t^{B_1}}\Big]\Big|\mathcal{F}_t\Big)$$

für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Mit der Bezeichnung $\tilde{A} := \tilde{Z}^r + M$ gilt nach Folgerung 4.38 (angewendet auf $\tilde{Z}^r$)

$$\begin{aligned}
\tilde{A}(\tau) &= \tilde{Z}^r(\tau) + M(\tau) \\
&= E\Big(\operatorname*{ess\,sup}_{\nu \in \mathcal{S}_{\rho_\tau^{B_1}}} E\Big[(A-M)(\nu)\Big|\mathcal{F}_{\rho_\tau^{B_1}}\Big]\Big|\mathcal{F}_\tau\Big) + M(\tau) \\
&\overset{(4.38)}{=} E\Big(A(\rho_\tau^{B_1}) - M(\rho_\tau^{B_1})\Big|\mathcal{F}_\tau\Big) + M(\tau) \\
&= E\Big(A(\rho_\tau^{B_1})\Big|\mathcal{F}_\tau\Big)
\end{aligned}$$

für alle $\tau \in \mathcal{S}$.

Sei nun zusätzlich $A|_{[T,\infty[} \equiv A(T)$ und $E(|A(T)|^p) < \infty$. Die erste zu zeigende Eigenschaft $\tilde{A}_{|[T,\infty[} \equiv \tilde{A}(T)$ folgt aus (4.36) und $\mathcal{F}_{|[T,\infty[} \equiv \mathcal{F}_T$. Weiter gilt nach der Doobschen Ungleichung

$$\begin{aligned}
&E\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} |\tilde{A}(t)|^p\Big) = E\Big(\sup_{t\in[0,T]} |\tilde{A}(t)|^p\Big) \overset{(4.36)}{\leq} E\Big(\sup_{t\in[0,T]} (-M)^p(t)\Big) \leq \\
\leq\ &\Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p E\Big((-M)^p(T)\Big) = \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p E\Big((-A)^p(T)\Big) < \infty.
\end{aligned}$$

□

Überträgt man Definition 4.41 auf das n-fache Stoppproblem, erhält man

Definition 4.47. Es seien

(i) für jede Stoppzeit σ und alle $\omega \in \Omega$

$$\Delta_\sigma^n(B)(\omega) := \{(\tau_n(\omega), ..., \tau_1(\omega));\ (\tau_1, ..., \tau_n) \in \mathcal{S}_\sigma^n(B)\} \quad \text{und}$$
$$\Delta_\sigma^1(\omega) := \{\tau(\omega);\ \tau \in \mathcal{S}_\sigma\} = \{t;\ t \geq \sigma(\omega)\}.$$

Es sei darauf hingewiesen, dass für alle $(t_1, ..., t_n) \in \Delta_\sigma^n(B)(\omega)$ gilt

$$t_1 \geq ... \geq t_n.$$

(ii) für alle nicht-negativen stochastischen Prozesse $(U_1(t))_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}, ..., (U_n(t))_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$

$$\sup_{t\in\Delta_\sigma^n(B)} \sum_{i=1}^n U_i(t_i) : \Omega \to [0,\infty], \quad \omega \mapsto \sup_{t\in\Delta_\sigma^n(B)(\omega)} \sum_{i=1}^n U_i(t_i)(\omega).$$

(iii) $\mathcal{A}_0^p$ die Menge aller $\mathfrak{F}$-adaptierten, rechtsseitig-stetigen und monoton fallenden stochastischen Prozesse $(A(t))_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ mit $A(0) = 0$, $A|_{[T,\infty[} \equiv A(T)$ und $E\big(|A(T)|^p\big) < \infty$. Nach Lemma 4.45 sind $A_1^*, ..., A_n^*$ in $\mathcal{A}_0^p$ enthalten.

(iv) für alle $i \in \mathbb{N}_{<n}$ und $A_i \in \mathcal{A}_0^p$ mit $\tilde{A}_i$ der (bis auf Ununterscheidbarkeit) eindeutig bestimmte $\mathfrak{F}$-adaptierte und rechtsseitig-stetige Prozess mit

$$\tilde{A}_i(\tau) = E\Big(A_i(\rho_\tau^{B_{n-i}})\Big|\mathcal{F}_\tau\Big) \quad \text{für alle } \tau \in \mathcal{S}$$

bezeichnet. Nach Lemma 4.46 existiert dieser und es gilt $E\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}} |\tilde{A}_i(t)|^p\Big) < \infty$.

Bemerkung 4.48. *Sei $\sigma \in \mathcal{S}$. Es gilt für die in 4.47.(i) definierte Menge $\Delta_\sigma^n(B)(\omega)$*

$$\begin{aligned}
\Delta_\sigma^n(B)(\omega) &= \{(\tau_n(\omega), ..., \tau_1(\omega));\ (\tau_1, ..., \tau_n) \in \mathcal{S}_\sigma^n(B)\} \\
&= \{(\tau_n(\omega), ..., \tau_1(\omega));\ \tau_1 \in \mathcal{S}_\sigma,\ (\tau_2, ..., \tau_n) \in \mathcal{S}^{n-1}_{\rho_{\tau_1}^{B_1}}(LB)\} \\
&= \{(t_1, ..., t_n);\ t_n \in \Delta_\sigma^1(\omega),\ (t_1, ..., t_{n-1}) \in \Delta^{n-1}_{\rho_{t_n}^{B_1}}(LB)(\omega)\}.
\end{aligned}$$

für alle $\omega \in \Omega$. □

Die erste Ungleichung der dualen Darstellung des mehrfachen Optimierungsproblems mit zufälligen Wartezeiten beinhaltet

Lemma 4.49. *Es gilt für alle $\sigma \in \mathcal{S}$, $M_1, ..., M_n \in \mathcal{H}^1$ und $A_1, ..., A_{n-1} \in \mathcal{A}_0^p$*

$$\begin{aligned}
Z_n^B(\sigma) \ \leq\ E\Big(\sup_{t\in\Delta_\sigma^n(B)} &\sum_{i=1}^{n-1} (Y - M_i)(t_i) + M_i(t_{i+1}) - A_i(\rho_{t_{i+1}}^{B_{n-i}}) + \tilde{A}_i(t_{i+1}) \\
&+\ (Y - M_n)(t_n) + M_n(\sigma)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big).
\end{aligned}$$

Beweis. Es seien $\sigma \in \mathcal{S}$, $M_1, ..., M_n \in \mathcal{H}^1$ und $A_1, ..., A_{n-1} \in \mathcal{A}_0^p$.
Nach dem Optional-Sampling-Theorem und der Definition 4.47.(iv) gilt für alle $\tau \in \mathcal{S}_\sigma^n$ mit der Bezeichnung $(\tilde{\tau}_1, ..., \tilde{\tau}_n) := (\tau_n, ..., \tau_1)$

$$\begin{aligned}
&E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tau_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \\
=\ &E\Big(\sum_{i=1}^n Y(\tilde{\tau}_i)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \\
=\ &E\Big(\sum_{i=1}^{n-1} (Y - M_i)(\tilde{\tau}_i) + M_i(\tilde{\tau}_{i+1}) - A_i(\rho_{\tilde{\tau}_{i+1}}^{B_{n-i}}) + E(A_i(\rho_{\tilde{\tau}_{i+1}}^{B_{n-i}})|\mathcal{F}_{\tilde{\tau}_{i+1}}) \\
&\quad + (Y - M_n)(\tilde{\tau}_n) + M_n(\sigma)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \\
=\ &E\Big(\sum_{i=1}^{n-1} (Y - M_i)(\tilde{\tau}_i) + M_i(\tilde{\tau}_{i+1}) - A_i(\rho_{\tilde{\tau}_{i+1}}^{B_{n-i}}) + \tilde{A}_i(\tilde{\tau}_{i+1}) \\
&\quad + (Y - M_n)(\tilde{\tau}_n) + M_n(\sigma)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big) \\
\leq\ &E\Big(\sup_{t\in\Delta_\sigma^n(B)} \sum_{i=1}^{n-1} (Y - M_i)(t_i) + M_i(t_{i+1}) - A_i(\rho_{t_{i+1}}^{B_{n-i}}) + \tilde{A}_i(t_{i+1}) \\
&\qquad +\ (Y - M_n)(t_n) + M_n(\sigma)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big).
\end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, dass nach 4.47.(iv)

$$\sup_{t\in\Delta^n_\sigma(B)}\sum_{i=1}^{n-1}(Y-M_i)(t_i)+M_i(t_{i+1})-A_i(\rho^{B_{n-i}}_{t_{i+1}})+\tilde{A}_i(t_{i+1})+(Y-M_n)(t_n)+M_n(\sigma)$$

integrierbar ist. □

Mit diesen Hilfssätzen kann die Beweisidee von C. Bender [2, Theorem 3.2] auf zufällige Wartezeiten übertragen werden.

Satz 4.50. *Für jede Stoppzeit σ gilt*

$$\begin{aligned} Z^B_n(\sigma) &= \sup_{t\in\Delta^n_\sigma(B)}\sum_{i=1}^{n-1}(Y-M^*_i)(t_i)+M^*_i(t_{i+1})-A^*_i(\rho^{B_{n-i}}_{t_{i+1}})+\tilde{A}^*_i(t_{i+1}) \\ &\quad + (Y-M^*_n)(t_n)+M^*_n(\sigma). \end{aligned} \tag{4.39}$$

Beweis. Es gilt für alle $t\in\mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\overline{Z}^{B,r}_{n-1}(t)=E(Z^{LB}_{n-1}(\rho^{B_1}_t)|\mathcal{F}_t)=E(M^*_{n-1}(\rho^{B_1}_t)+A^*_{n-1}(\rho^{B_1}_t)|\mathcal{F}_t)=M^*_{n-1}(t)+\tilde{A}^*_{n-1}(t),$$

also

$$\begin{aligned} \overline{Z}^{B,r}_{n-1}(t) &= M^*_{n-1}(t)+\tilde{A}^*_{n-1}(t) \\ &= Z^{LB}_{n-1}(\rho^{B_1}_t)-M^*_{n-1}(\rho^{B_1}_t)+M^*_{n-1}(t)-A^*_{n-1}(\rho^{B_1}_t)+\tilde{A}^*_{n-1}(t) \end{aligned} \tag{4.40}$$

Der Satz wird nun durch Induktion über n bewiesen:

I.A.: Die Gleichung (4.39) resultiert im Falle $n=1$ direkt aus Satz 4.42.

I.S.: Es gelte obige Aussage für $n-1$. Mit (4.40) erhält man

$$\begin{aligned} & Y_n(t_n) \\ =\ & Y(t_n)+\overline{Z}^{B,r}_{n-1}(t_n) \\ =\ & Y(t_n)+Z^{LB}_{n-1}(\rho^{B_1}_{t_n})-M^*_{n-1}(\rho^{B_1}_{t_n})+M^*_{n-1}(t_n)-A^*_{n-1}(\rho^{B_1}_{t_n})+\tilde{A}^*_{n-1}(t_n) \\ =\ & Y(t_n)+\sup_{t\in\Delta^{n-1}_{\rho^{B_1}_{t_n}}(LB)}\sum_{i=1}^{n-2}(Y-M^*_i)(t_i)+M^*_i(t_{i+1})-A^*_i(\rho^{B_{n-i}}_{t_{i+1}})+\tilde{A}^*_i(t_{i+1}) \\ & \qquad + (Y-M^*_{n-1})(t_{n-1})+M^*_{n-1}(\rho^{B_1}_{t_n}) \\ & \qquad - M^*_{n-1}(\rho^{B_1}_{t_n})+M^*_{n-1}(t_n)-A^*_{n-1}(\rho^{B_1}_{t_n})+\tilde{A}^*_{n-1}(t_n) \\ =\ & Y(t_n)+\sup_{t\in\Delta^{n-1}_{\rho^{B_1}_{t_n}}(LB)}\sum_{i=1}^{n-2}(Y-M^*_i)(t_i)+M^*_i(t_{i+1})-A^*_i(\rho^{B_{n-i}}_{t_{i+1}})+\tilde{A}^*_i(t_{i+1}) \\ & \qquad +(Y-M^*_{n-1})(t_{n-1})+M^*_{n-1}(t_n)-A^*_{n-1}(\rho^{B_1}_{t_n})+\tilde{A}^*_{n-1}(t_n) \\ =\ & Y(t_n)+\sup_{t\in\Delta^{n-1}_{\rho^{B_1}_{t_n}}(LB)}\sum_{i=1}^{n-1}(Y-M^*_i)(t_i)+M^*_i(t_{i+1})-A^*_i(\rho^{B_{n-i}}_{t_{i+1}})+\tilde{A}^*_i(t_{i+1}) \end{aligned}$$

für alle $t_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Also gilt zusammen mit Antitonie von A_n^*

$$
\begin{aligned}
& Z_n^B(\sigma) \\
= \; & \sup_{t_n \geq \sigma} Z_n^B(\sigma) - A_n^*(\sigma) + A_n^*(t_n) \\
= \; & \sup_{t_n \in \Delta_\sigma^1} M_n^*(\sigma) + Z_n^{B\circ}(t_n) - M_n^*(t_n) \\
\geq \; & \sup_{t_n \in \Delta_\sigma^1} Y_n(t_n) - M_n^*(t_n) + M_n^*(\sigma) \\
= \; & \sup_{t_n \in \Delta_\sigma^1} \sup_{t \in \Delta^{n-1}_{\rho^{B_1}_{t_n}}(LB)} \sum_{i=1}^{n-1} (Y - M_i^*)(t_i) + M_i^*(t_{i+1}) - A_i^*(\rho_{t_{i+1}}^{B_{n-i}}) + \tilde{A}_i^*(t_{i+1}) \\
& \qquad + \; (Y - M_n^*)(t_n) + M_n^*(\sigma) \\
\overset{4.48}{=} \; & \sup_{t \in \Delta_\sigma^n(B)} \sum_{i=1}^{n-1} (Y - M_i^*)(t_i) + M_i^*(t_{i+1}) - A_i^*(\rho_{t_{i+1}}^{B_{n-i}}) + \tilde{A}_i^*(t_{i+1}) \\
& \qquad + \; (Y - M_n^*)(t_n) + M_n^*(\sigma)
\end{aligned}
$$

für alle $\sigma \in \mathcal{S}$. Daraus resultiert (4.39) zusammen mit Lemma 4.49. □

Mit 4.49 erhält man daraus die Gleichung (4.34) für das mehrfache Stoppproblem:

Folgerung 4.51. *Es gilt für alle $\sigma \in \mathcal{S}$*

$$
\begin{aligned}
Z_n^B(\sigma) \; = \; & \operatorname*{ess\,inf}_{M \in (\mathcal{H}^1)^n,\, A \in (\mathcal{A}_0^p)^{n-1}} E\Big(\sup_{t \in \Delta_\sigma^n(B)} \sum_{i=1}^{n-1} (Y - M_i)(t_i) + M_i(t_{i+1}) - A_i(\rho_{t_{i+1}}^{B_{n-i}}) + \tilde{A}_i(t_{i+1}) \\
& \qquad + \; (Y - M_n)(t_n) + M_n(\sigma) \Big| \mathcal{F}_\sigma \Big).
\end{aligned}
$$

□

Literaturverzeichnis

[1] Leif Andersen and Mark Broadie. Primal-dual simulation algorithm for pricing multidimensional american options. *Management Sciences*, 50(p):1222–1234, 2004.

[2] Christian Bender. Dual pricing of multi-exercise options in continous. 2009. Preprint.

[3] Christian Bender. Dual pricing of multi-exercise options under volume constraints. 2009. Preprint.

[4] Christian Bender and John Schoenmakers. An iterative method for multiple stopping: convergence and stability. *Adv. in Appl. Probab.*, 38(3):729–749, 2006.

[5] Fred Espen Benth, Jan Kallsen, and Thilo Meyer-Brandis. A non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck process for electricity spot price modeling and derivatives pricing. *Appl. Math. Finance*, 14(2):153–169, 2007.

[6] René Carmona and Savas Dayanik. Optimal multiple stopping of linear diffusions. *Math. Oper. Res.*, 33(2):446–460, 2008.

[7] René Carmona and Nizar Touzi. Optimal multiple stopping and valuation of swing options. *Math. Finance*, 18(2):239–268, 2008.

[8] Nan Chen and Paul Glasserman. Additive and multiplicative duals for American option pricing. *Finance Stoch.*, 11(2):153–179, 2007.

[9] Savas Dayanik and Ioannis Karatzas. On the optimal stopping problem for one-dimensional diffusions. *Stochastic Process. Appl.*, 107(2):173–212, 2003.

[10] Richard A. DeFusco, Robert R. Johnson, and Thomas S. Zorn. The effect of executive stock option plans on stockholders and bondholders. 45(2).

[11] Wolfgang Domschke and Andreas Drexl. *Einführung in Operations Research.* Springer-Verlag, Berlin, 5 edition, 2002.

[12] Wolfgang Domschke, Armin Scholl, and Stefan Voß. *Produktionsplanung, Ablauforganisatorische Aspekte.* Springer-Verlag, Berlin, 2 edition, 1993.

[13] E. B. Dynkin. Optimal choice of the stopping moment of a Markov process. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 150:238–240, 1963.

[14] Ben Hambly, Sam Howison, and Tino Kluge. Modelling spikes and pricing swing options in electricity markets. *Quant. Finance*, 9(8):937–949, 2009.

[15] Martin B. Haugh and Leonid Kogan. Pricing American options: a duality approach. *Oper. Res.*, 52(2):258–270, 2004.

[16] Vicky Henderson. The impact of the market portfolio on the valuation, incentives and optimality of executive stock options. *Quant. Finance*, 5(1):35–47, 2005.

[17] Albrecht Irle. *Finanzmathematik*. Teubner Studienbücher Mathematik. [Teubner Mathematical Textbooks]. B. G. Teubner, Stuttgart, 1998. Die Bewertung von Derivaten. [The evaluation of derivatives].

[18] Patrick Jaillet, Ehud I. Ronn, and Stathis Tompaidis. Valuation of commodity-based swing options. *Management Science*, 50(7):900–921, 2004.

[19] Olav Kallenberg. *Foundations of modern probability*. Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, New York, second edition, 2002.

[20] Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*, volume 113 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1988.

[21] Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve. *Methods of mathematical finance*, volume 39 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, New York, 1998.

[22] Ralf Korn. Realism and practicality of transaction cost approaches in continuous-time portfolio optimisation: the scope of the Morton-Pliska approach. *Math. Methods Oper. Res.*, 60(2):165–174, 2004.

[23] Tim Leung and Ronnie Sircar. Accounting for risk aversion, vesting, job termination risk and multiple exercises in valuation of employee stock options. *Math. Finance*, 19(1):99–128, 2009.

[24] N. Meinshausen and B. M. Hambly. Monte Carlo methods for the valuation of multiple-exercise options. *Math. Finance*, 14(4):557–583, 2004.

[25] Bernt Øksendal. *Stochastic differential equations*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, sixth edition, 2003. An introduction with applications.

[26] Antoon Pelsser. *Efficient methods for valuing interest rate derivatives*. Springer-Verlag, London, 2000.

[27] Goran Peskir and Albert Shiryaev. *Optimal stopping and free-boundary problems.* Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.

[28] L. C. G. Rogers. Monte Carlo valuation of American options. *Math. Finance*, 12(3):271–286, 2002.

[29] John Schoenmakers. The real multiple dual. 2009. Preprint.

[30] Eduardo Schwartz. The stochastic behavior of commodity prices: Implication for valuation and hedging. *Journal of Finance*, 52:923–973, 1997.

[31] A. N. Shiryayev. *Optimal stopping rules.* Springer-Verlag, New York, 1978. Translated from the Russian by A. B. Aries, Applications of Mathematics, Vol. 8.

[32] Andrew C. Thompson. Valuation of path-dependent contingent claims with multiple exercise decisions over time: The case of take-or-pay. *J. Financial Quant. Anal.*, 30:271–293, 1995.

[33] A. Wald and J. Wolfowitz. Optimum character of the sequential probability ratio test. *Ann. Math. Statistics*, 19:326–339, 1948.

[34] A. Wald and J. Wolfowitz. Bayes solutions of sequential decision problems. *Ann. Math. Statistics*, 21:82–99, 1950.

[35] Rudi Zagst. *Interest rate management.* Springer-Verlag, Berlin, 2002.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name	**Stephan Jürgens**
Geburtsdatum	**17. Januar 1982**
Geburtsort	**Rendsburg, Deutschland**
Nationalität	**deutsch**

Ausbildung

10/2002 - 05/2008	**Studium der Mathematik mit Nebenfach Betriebswirtschaftslehre an der CAU Kiel, Deutschland**, *Diplom 06/2008.*
11/2001 - 09/2002	**Wehrdienst in Budel, Niederlande, und Husum, Deutschland**.
08/1988 - 06/2001	**Schulbesuch in Büdelsdorf und Rendsburg am Gymnasium Kronwerk**, *Abitur 06/2002.*

Berufserfahrung

06/2008 - 06/2011	**Wissenschaftlicher Angestellter am Mathematischen Seminar der CAU Kiel, Deutschland**, *Verteidigung 01/2011.*

Kiel, den 7. Dezember 2010

Eidesstattliche Erklärung

Ich habe die vorliegende Arbeit abgesehen von der Beratung durch den Betreuer meiner Promotion unter Einhaltung der Regeln guter wissenschaftlicher Praxis der Deutschen Forschungsgemeinschaft selbstständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet; die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht. Diese Arbeit ist bisher weder veröffentlicht noch zur Veröffentlichung eingereicht worden und hat weder ganz noch zum Teil an anderer Stelle im Rahmen eines Prüfungsverfahrens vorgelegen. Des Weiteren habe ich noch keinen Promotionsversuch unternommen.

Kiel, den 2. Februar 2011

(Stephan Jürgens)